Institutionen för Matematik , KTH
Avd Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning, 2004-01-12, 5B1117, Matematik III för E, Media och T

1. Substituera $u = xy$ och $v = x/y$.
   Integrationsområdet D' i uv-planet blir $0 \leq u \leq 1$ och $1 \leq v \leq 3$.
   Vi har
   $$|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \frac{1}{|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}|} = \frac{y}{2x}$$
   varför
   $$\iint_D x^2 e^{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_{D'} e^{u^2}u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^3 \mathrm{d}v \int_0^1 e^{u^2}u\,\mathrm{d}u = \frac{e-1}{2}$$

2. Kan lösas genom projektion på yz-planet eller sfäriska koordinater. Med sfäriska koordinater där θ är vinkeln mot x-axeln och φ är vinkeln i yz-planet fås
   $$A = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \iint_S r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \{r \equiv 2, \quad \theta : 0 \to \pi/3, \quad \varphi : 0 \to 2\pi\} =$$
   $$= 4\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/3} \sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi$$

3. Låt D vara det område som omsluts av Γ, som är negativt orienterad. Greens sats ger
   $$\oint_\Gamma \frac{x+y}{x^2}\,\mathrm{d}x + (xy - \frac{1}{x})\,\mathrm{d}y = -\iint_D (y + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{y=-1}^{1} y \int_{x=y+2}^{x=\frac{y+5}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$$

4. Notera att $\mathrm{grad}\, f = (yz, xz, xy)$ och $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = 0$. Skapa en sluten yta genom att lägga till en bottenyta S_b i xy-planet, med normalen nedåtriktad. Gauss sats ger
   $$\iint_S = \oiint_{S+S_b} - \iint_{S_b} = -\iint_{S_b} = \{z \equiv 0 \text{ pa } S_b\} =$$
   $$= \iint_{S_b} (0,0,xy)\cdot(-\hat{\mathbf{e}}_z)\,\mathrm{d}\sigma = -\iint_{x^2+y^2\leq 1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \{\text{symmetri}\} = 0$$

5. Den skalära potentialen U bestäms ur vektorekvationen
   $$\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}\, U = (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})$$
   Detta ger tre ekvationer, en för varje komponent. Börja t.ex. med ekvationen för y-komponenten:
   $$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

$2y$ är den inre derivata som behövs för att integrera högerledet. Integration av ekvationen ger

$$U = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} + f(x, z)$$

där f är en godtycklig funktion av variablerna x och z. Integration av motsvarande ekvationer för z respektive x-komponenterna ger

$$f(x, z) = g(x),$$

dvs funktionen f får inte bero av z utan bara av x, respektive

$$g(x) = C,$$

dvs inte heller något beroende av x får förekomma. Funktionen f är alltså en godtycklig konstant, och det allmänna uttrycket för potentialen blir

$$U = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} + C,$$

där C är en godtycklig konstant.

6. a) $\operatorname{div}(xy, -y^2, yz) = y - 2y + y = 0$

   b) $\boldsymbol{A}$ är en vektorpotential till $\boldsymbol{F}$ om $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$. Om vi vill bestämma en vektorpotential så räcker det att bestämma ett vektorfält $\boldsymbol{A}$ vars rotation blir $\boldsymbol{F}$. Ett sådant fält (en partikulärlösning) kan bestämmas enligt

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 (\boldsymbol{F}(t\boldsymbol{r}) \times t\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}t = \int_0^1 (t^2xy, -t^2y^2, t^2yz) \times t\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}t =$$

$$= (xy, -y^2, yz) \times (x, y, z) \int_0^1 t^3\, \mathrm{d}t = (-2y^2z, 0, 2xy^2)\,\frac{1}{4} = \frac{y^2}{2}(-z, 0, x)$$

7. Stokes' universalsats ger

$$\oint_\Gamma = \iint_S (\hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \times \nabla)z = \iint_S \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \times \hat{\mathbf{e}}_z.$$

   Välj S som den plana inspända ytan. Omloppsriktningen ger att normalen skall vara riktad mot origo, dvs normalens z-komponent skall vara negativ. Ekvationen för planet i vilket cirkeln ligger ger att

$$\hat{\boldsymbol{n}} \parallel (1, 2, -2),$$

   vars z-komponent har rätt tecken. Normering ger

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{(1, 2, -2)}{|(1, 2, -2)|} = \frac{1}{3}(1, 2, -2),$$

   och

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(2, -1, 0)$$

   Nu kan vi beräkna integralen

$$\iint_S \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \times \hat{\mathbf{e}}_z = \iint_S \frac{1}{3}(2, -1, 0)\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{3}(2, -1, 0) \iint_S \mathrm{d}\sigma = \{\text{radien} = 1\} = \frac{\pi}{3}(2, -1, 0)$$

8. Formell nablaräkning ger

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}(\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}))-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times(\nabla\frac{1}{r^3})=$$

$$=\frac{1}{r^3}(\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times(\frac{-3}{r^4}\hat{\mathbf{e}}_r)=\frac{1}{r^3}(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a})-\frac{3}{r^5}(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}))=$$

$$=\frac{2\boldsymbol{a}}{r^3}-\frac{3\boldsymbol{a}}{r^3}+\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}=\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}-\frac{\boldsymbol{a}}{r^3}$$

9. Se Analytiska metoder 2, övningsboken, uppgift 1106 (1206 i den nya upplagan).

10. Integranden kan anta både positiva och negativa värden. Integralen är konvergent om och endast om

$$\iint_{\mathbf{R}^2}|\cos(x^2+y^2)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

är konvergent, men denna är divergent eftersom funktionen cosinus inte går mot noll då argumentet $(x^2+y^2)=r^2$ går mot oändligheten.

Svar: Den angivna integralen är divergent.

11. a) Flödet blir maximalt om ytan Σ innesluter alla punkter med en positiv källtäthet.

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2A_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}rA_\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(2r^3-4r^5)+0=6-20r^2$$

$\operatorname{div}\boldsymbol{A}>0$ för $r<\sqrt{3/10}$, dvs Σ skall vara en sfär med denna radie och centrum i origo.

b) Det maximala flödet blir

$$\iint_\Sigma\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_V\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V=\int_0^{\sqrt{3/10}}(6-20r^2)4\pi r^2\,\mathrm{d}r=\frac{12\pi\sqrt{30}}{125}$$

12. a) Basvektorerna är parallella med gradienterna av respektive koordinater.

$$\operatorname{grad}u=\operatorname{grad}(r\sin^2\frac{\theta}{2})=\hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r}(r\sin^2\frac{\theta}{2})+\frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin^2\frac{\theta}{2})+0=\hat{\boldsymbol{e}}_r\sin^2\frac{\theta}{2}+\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

På samma sätt fås

$$\operatorname{grad}v=\hat{\boldsymbol{e}}_r\cos^2\frac{\theta}{2}-\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\operatorname{grad}w=\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\frac{2}{r\sin\theta}$$

Är basvektorerna $\hat{\boldsymbol{e}}_u$, $\hat{\boldsymbol{e}}_v$ och $\hat{\boldsymbol{e}}_w$ ortogonala?

$\hat{\boldsymbol{e}}_u\perp\hat{\boldsymbol{e}}_w$ och $\hat{\boldsymbol{e}}_v\perp\hat{\boldsymbol{e}}_w$ eftersom $\hat{\boldsymbol{e}}_w\parallel\operatorname{grad}w\parallel\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ men $\hat{\boldsymbol{e}}_u$ och $\hat{\boldsymbol{e}}_v$ saknar φ-komponent.

Vinkeln mellan $\hat{\boldsymbol{e}}_u$ och $\hat{\boldsymbol{e}}_v$ ges av skalärprodukten

$$\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v=\{\text{sfäriska koordinater är ett lokalt ON}-\text{system}\}=$$

$$=\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(-\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})+0=0$$

dvs $\hat{\boldsymbol{e}}_u\perp\hat{\boldsymbol{e}}_v$

Basvektorerna är ortogonala.

b) Det nya systemet är alltså ett ortogonalt, kroklinjigt koordinatsystem, och då gäller formelbladets uttryck, dvs

$$\operatorname{grad}\Phi=\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\hat{\boldsymbol{e}}_u+\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\hat{\boldsymbol{e}}_v+\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\hat{\boldsymbol{e}}_w$$

Om vi sätter $\Phi = u$ får vi

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{h_u}\hat{\boldsymbol{e}}_u$$

dvs

$$h_u = \frac{1}{|\operatorname{grad} u|} = \frac{1}{\sqrt{\sin^4\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \{u = r\sin^2\frac{\theta}{2}\} = \sqrt{\frac{r}{u}} = \{u + v = r\} = \sqrt{\frac{u+v}{u}}$$

På samma sätt fås

$$h_v = \frac{1}{|\operatorname{grad} v|} = \sqrt{\frac{u+v}{v}}$$

$$h_w = \frac{1}{|\operatorname{grad} w|} = \frac{r\sin\theta}{2} = r\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{uv}$$

Skalfaktorerna är alltså $\begin{cases} h_u = \sqrt{\dfrac{u+v}{u}} \\ h_v = \sqrt{\dfrac{u+v}{v}} \\ h_w = \sqrt{uv} \end{cases}$

c) Divergensen kan då beräknas genom insättning i formelbladets uttryck:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{1}{u+v}\left(\frac{\partial}{\partial u}(u^2 + uv) + \frac{\partial}{\partial v}(v^2 + uv)\right) = \frac{1}{u+v}(2u + v + 2v + u) = 3$$

13. Låt $\boldsymbol{e}$ vara en godtycklig konstant vektor, t.ex. en godtycklig basvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_x$, $\hat{\boldsymbol{e}}_y$ eller $\hat{\boldsymbol{e}}_z$. Gauss' universalsats kan användas efter förenkling genom skalärmultiplikation med $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{e}\cdot\iint_\Sigma \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r^3}\hat{\boldsymbol{e}}_r\,\mathrm{d}\sigma = \iint_\Sigma \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot(\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma)}{r^3}\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\boldsymbol{e} = \iint_\Sigma (\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma)\cdot(\hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\boldsymbol{e}}{r^3}) = \iiint_V \nabla\cdot(\hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\boldsymbol{e}}{r^3})\,\mathrm{d}V$$

Använd ledningen $\hat{\boldsymbol{e}}_r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$. Integranden kan förenklas med nablaräkning:

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\boldsymbol{e}}{r^3} = \nabla\cdot\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}}{r^5} = \nabla\cdot\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})r^{-5} = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}}{r^5}(\nabla\cdot\boldsymbol{r}) + \frac{\boldsymbol{r}}{r^5}\cdot\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{r}\cdot\nabla(r^{-5}) =$$

$$= 3\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}}{r^5} + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}}{r^5} - 5\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}}{r^5} = -\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}}{r^5} = -\boldsymbol{e}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^5}$$

Eftersom $\boldsymbol{e}$ är en konstant vektor kan den brytas ut ur integralen, dvs

$$\iiint_V \nabla\cdot(\hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\boldsymbol{e}}{r^3}) = \iiint_V(-\boldsymbol{e}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^5}) = \boldsymbol{e}\cdot\iiint_V(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^5})\,\mathrm{d}V$$

Eftersom $\boldsymbol{e}$ är godtycklig så är en godtycklig komponent av $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r^3}\hat{\boldsymbol{e}}_r\,\mathrm{d}\sigma$ lika med motsvarande komponent av $\displaystyle\iiint_V(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^5})\,\mathrm{d}V$, dvs

$$\iint_\Sigma \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r^3}\hat{\boldsymbol{e}}_r\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^5})\,\mathrm{d}V$$

Om integranden skall vara en gradient så måste följande gälla:

$$-\frac{\boldsymbol{r}}{r^5} = \operatorname{grad} f(r) = \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\hat{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

vilket ger $f(r) = \dfrac{1}{3r^3} + C$, däe C är en godtycklig konstant.