Institutionen för matematik, KTH
Avd Matematik

Tentamensskrivning, 2004-01-12, kl. 08.00-13.00
5B1117, Matematik III för E, Media och T (6p)

- Om du redan är godkänd (dvs har minst 5 godkända lappskrivningar) så skall du endast räkna uppgifter från B-delen.
- Om du inte är godkänd får du räkna uppgifter från både A-delen och B-delen. För uppgifter från A-delen tillgodoräknas dock endast det antal poäng som kompletterar dina bonuspoäng till 15. Se del A nedan.

Preliminära gränser för betygen 3, 4, och 5 är 15, 26 och 31 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning.

Hjälpmedel: Medföljande formelblad (se sista sidan) är det enda tillåtna hjälpmedlet. Miniräknare ej tillåten.

Uppgiftsformuleringarna behöver inte lämnas in. Lösningsförslag finns efter skrivtidens slut på kurshemsidan.

Var god vänd!

Del A, 3-poängsuppgifter

Den som blivit godkänd på lappskrivning x, $1 \leq x \leq 7$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

1. Beräkna $\displaystyle\iint_D x^2 e^{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

   där D ges av att $\begin{cases} xy < 1 \\ 0 < y < x < 3y. \end{cases}$

2. Bestäm arean av den yta som definieras av

   $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$

3. Beräkna $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{x+y}{x^2}\,\mathrm{d}x + (xy - \frac{1}{x})\,\mathrm{d}y$,

   där Γ är periferin av triangeln med hörn i (3,1), (2,-1) och (1,-1). Punkterna genomlöps i nämnd ordning.

4. Beräkna $\displaystyle\iint_S \operatorname{grad} f \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$,

   där $f = xyz$ och S är övre halvan av enhetssfären:

   $$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z \geq 0,$$

   med normalen riktad utåt från origo.

5. Bestäm det allmänna uttrycket för den skalära potentialen till vektorfältet

   $$\boldsymbol{F} = (\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}, \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2})$$

6. Betrakta ett vektorfält $\boldsymbol{F} = (xy, -y^2, yz)$

   a) Visa att vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är källfritt (1p).

   b) Bestäm en vektorpotential till $\boldsymbol{F}$ (2p).

7. Beräkna $\displaystyle\oint_\Gamma z\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,

   där Γ är den cirkel som ligger i planet $x + 2y - 2z + 6 = 0$, har medelpunkten i $(0, 0, 3)$ och radien 1. Γ genomlöps moturs för en betraktare placerad i origo.

   Ledning: Omvandla integralen till en lämplig ytintegral.

8. Beräkna med hjälp av formell nablaräkning (eller annan metod)

   $$\operatorname{rot}(\frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}}{r^3})$$

   där $\boldsymbol{a}$ är en godtycklig, konstant vektor, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ är ortsvektorn och r är beloppet av ortsvektorn.

Del B, 4-poängsuppgifter

9. Bestäm MacLaurinutvecklingen för $\arctan x$ genom att använda att

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

där $\dfrac{1}{1+t^2}$ kan uttryckas som en potensserie (MacLaurinutveckling) före integrationen. Bestäm även konvergensområdet för utvecklingarna av $\dfrac{1}{1+t^2}$ respektive $\arctan x$.

10. Undersök konvergensen av den generaliserade dubbelintegralen $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

11. Ett vektorfält

$$\boldsymbol{A} = (2r - 4r^3)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$$

är givet i i sfäriska koordinater.

a) Avgör hur den slutna ytan Σ skall väljas för att flödet av vektorfältet $\boldsymbol{A}$ genom Σ skall bli så stort som möjligt (2p).

b) Beräkna det maximala flödet av $\boldsymbol{A}$ genom Σ (2p).

12. Ett kroklinjigt koordinatsystem definieras av

$$\begin{cases} u = r\,\sin^2\dfrac{\theta}{2} \\ v = r\,\cos^2\dfrac{\theta}{2} \\ w = 2\varphi \end{cases}$$

där r, θ och φ är de sfäriska koordinaterna.

a) Visa att basvektorerna $\hat{\boldsymbol{e}}_u$, $\hat{\boldsymbol{e}}_v$ och $\hat{\boldsymbol{e}}_w$ är ortogonala (1p).

b) Bestäm skalfaktorerna h_u, h_v och h_w och uttryck dem i koordinaterna u, v och w (2p).

c) Beräkna divergensen av $\boldsymbol{F} = \sqrt{u^2+uv}\,\hat{\boldsymbol{e}}_u + \sqrt{v^2+uv}\,\hat{\boldsymbol{e}}_v$ (1p).

13. Visa att ytintegralen

$$\iint_\Sigma \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r^3}\hat{\boldsymbol{e}}_r\,\mathrm{d}\sigma$$

kan omformas till en volymsintegral av typen

$$\iiint_V \operatorname{grad} f(r)\,\mathrm{d}V$$

över det av Σ omslutna området. Origo är en yttre punkt till V. Bestäm funktionen $f(r)$.

Ledning: Använd att $\hat{\boldsymbol{e}}_r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$.