Institutionen för matematik
KTH

Lösningsförslag till tentamensskrivning, 2004-05-25

5B1117 Matematik III för E och ME

1. Området är triangulärt. Integranden gör att vi börjar med att integrera i x-led:

$$\iint_D \frac{x^3}{1+y^5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1/2}\int_{x=0}^{2y}\frac{x^3}{1+y^5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1/2}\frac{1}{1+y^5}\int_{x=0}^{2y}x^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{y=0}^{1/2}\frac{1}{1+y^5}4y^4\,\mathrm{d}y = \{\text{substituera}\quad 1+y^5=t\} = \int_{t=1}^{1+\frac{1}{32}}\frac{4}{t}\frac{\mathrm{d}t}{5} = \frac{4}{5}[\ln t]_1^{\frac{33}{32}} = \frac{4}{5}\ln\frac{33}{32}$$

2. a) $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})(a_x x + a_y y + a_z z) = (a_x, a_y, a_z) = \boldsymbol{a}$

b) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{r}) = -\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

c) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) = \nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} =$

$$= \boldsymbol{a}(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z) - (a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z})(x,y,z) = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}$$

3. Substituera: Sätt $3x-2=t$

Serien blir då

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}t^n$$

Denna serie har konvergenscentrum vid $t=0$.

Konvergensradien bestäms ur

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

vilket ger att konvergensradien för t är 1.

Ändpunkterna:

$t=1 \Rightarrow \sum\frac{1}{n^2}$ som är konvergent.

$t=-1 \Rightarrow \sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ som är konvergent eftersom den är absolutkonvergent.

Serien är alltså konvergent för $-1\le t\le 1$,

dvs för $-1\le 3x-2\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1\le 3x\le 3 \quad\Leftrightarrow\quad 1/3\le x\le 1$

4. a) Låt D_R vara cirkelskivan $x^2+y^2\le R^2$. Med användande av polära koordinater (r,φ) fås

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R e^{-r^2}r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi[\frac{e^{-r^2}}{-2}]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Då $R \to \infty$ växer detta mot π samtidigt som cirkelskivorna D_R tömmer ut hela $\mathbf{R}^2$. Eftersom integranden $e^{-x^2-y^2}$ är positiv så räcker det att betrakta denna enda uttömmande familj $\{D_R\}$. Det följer att integralen $\iint_{\mathbf{R^2}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ existerar och $= \pi$.

b) Då vi nu vet att integralen i a) är konvergent kan vi använda upprepad enkelintegration:

$$\pi = \iint_{\mathbf{R^2}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x)^2,$$

varav

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Samma typ av resonemang ger

$$\iiint_{\mathbf{R^3}} e^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x)^3 = \pi^{3/2}.$$

5. a) Vektorfältet $\boldsymbol{v}$ är definierat och kontinuerligt deriverbart i $D = \mathbf{R^3} \setminus (z-\text{axeln})$. I D gäller

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}[-\frac{\partial}{\partial z}(\rho\,\frac{1}{\rho})\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\,\frac{1}{\rho})\hat{\boldsymbol{e}}_z] = 0.$$

Det följer att $\boldsymbol{v}$ har en skalär potential i varje enkelt sammanhängande delområde av D.

b) Vi har också

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{1}{\rho}) = 0,$$

varav följer att $\boldsymbol{v}$ har en vektorpotential i D.

c) En skalär potential U ska uppfylla $\operatorname{grad} U = \boldsymbol{v}$. Uttryckt i de cylindriska komponenterna blir detta

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = 0,$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho},$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Man finner omedelbart att

$$U = \varphi + C$$

(C en godtycklig konstant) löser ovanstående system. Lämpligt definitionsområde för U är varje område där vinkelvariabeln φ kan väljas enkelvärd, dvs. varje område som inte innehåller någon sluten kurva runt z-axeln. Exempel: Området definierat av $0 < \varphi < 2\pi$ i cylinderkoordinater.

En vektorpotential $\boldsymbol{A} = A_\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + A_\varphi\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + A_z\hat{\boldsymbol{e}}_z$ till $\boldsymbol{v}$ ska uppfylla $\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}$, dvs i (cylindriska) komponenter

$$\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho},$$

$$\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} = 0.$$

Om man tittar en stund på dessa ekvationer (särskilt den andra) så hittar man (kanske) lösningen

$$A_\rho = 0, \quad A_\varphi = 0, \quad A_z = -\ln\rho,$$

dvs.

$$\boldsymbol{A} = -\ln\rho\,\hat{\boldsymbol{e}}_z.$$

En annan lösning är $\boldsymbol{A} = \frac{z}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$. Båda lösningarna är definierade i hela D. Den allmänna lösningen är någon av ovanstående plus ett godtyckligt rotationsfritt fält, tex. ett på formen $\operatorname{grad}\Phi$ för något skalärfält Φ.

En vektorpotential kan också konstrueras med hjälp av den allmänna formeln

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 \boldsymbol{v}(t\boldsymbol{r}) \times t\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}t.$$

Den visar sig ge potentialen

$$\boldsymbol{A} = \frac{z}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho - \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

i vårt fall. (Om man vill arbeta i cylinderkoordinater så börjar man lämpligen med att härleda uttrycket $\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z$ för ortsvektorn i dessa koordinater.)

6. Ytan S kan uppfattas som en graf, tex. för funktionen

$$z = f(x,y) = 1 - x - y$$

med definitionsområde

$$D: \quad x + y \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Detta ger

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

varav

$$\iint_S \mathrm{d}\sigma = \sqrt{3}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Om vi tittar på tex. x-komponenten av $\iint_S \boldsymbol{r}\mathrm{d}\sigma$ så har vi med hjälp av ovanstående

$$\iint_S x\mathrm{d}\sigma = \sqrt{3}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x dy = \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Samma resultat fås för y- och z-komponenterna, varför

$$\iint_S \boldsymbol{r}\mathrm{d}\sigma = \frac{\sqrt{3}}{6}(1,1,1)$$

och därmed

$$\boldsymbol{r}_{TP} = \frac{1}{3}(1,1,1).$$

7. Man konstaterar först att vektorfältet är singulärt där nämnaren är noll, dvs på cirkeln $(x-1)^2+y^2=1$. Kurvan L ligger i ytterområdet $(x-1)^2+y^2>1$, och där finner man att fältet är rotationsfritt (dvs $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ med $\mathbf{F}=(P,Q)$). Alltså kan vi lösa uppgiften antingen genom att deformera integrationsvägen till en väg som ger enklare integration eller genom att bestämma en potential.

   Vi väljer det senare: En potential U ska uppfylla

$$\frac{\partial U}{\partial x}=F_x=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2-1},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=F_y=\frac{y}{(x-1)^2+y^2-1},$$

   vilket ger

$$U=\frac{1}{2}\ln[(x-1)^2+y^2-1]+C,$$

   definierad i $(x-1)^2+y^2>1$. Därmed fås

$$\int_L \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=U(-4,0)-U(4,0)=\frac{1}{2}\ln 24-\frac{1}{2}\ln 8=\frac{1}{2}\ln 3.$$

8. Studera integranden!

$$\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_z\\ 0 & 0 & 1\\ x & y & z\end{vmatrix}=(-y,x,0)$$

$$(\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\boldsymbol{r})\cdot(\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\boldsymbol{r})=(-y,x,0)\cdot(-y,x,0)=x^2+y^2$$

   Om vi inför sfäriska koordinater kan vi skriva $x^2+y^2=r^2\sin^2\theta$. Detta ger

$$\boldsymbol{F}=\frac{(\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\boldsymbol{r})\cdot(\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}|^5}\boldsymbol{r}=\frac{r^2\sin^2\theta}{r^5}\boldsymbol{r}=\frac{\sin^2\theta}{r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

   Fältet är singulärt i origo. För övrigt gäller

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,\frac{\sin^2\theta}{r^2})+0+0=0$$

   Om vi skär bort origo genom att lägga in en liten sfäryta S_ϵ med radien ϵ och normalvektorn inåt kan vi skapa oss ett område V^* mellan ytorna S och S_ϵ på vilket vi kan använda Gauss' sats.

   Flödet genom ytan S är

$$\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{S+S_\epsilon-S_\epsilon}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=\oiint_{S+S_\epsilon}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{S_\epsilon}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\iiint_{V^*}\operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{S_\epsilon}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\{\text{I } V^* \text{ gäller } \operatorname{div}\boldsymbol{F}=0.\text{ På } S_\epsilon \text{ gäller } \hat{\boldsymbol{n}}=-\hat{\boldsymbol{e}}_r\}=$$

$$=-\iint_{S_\epsilon}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot(-\hat{\boldsymbol{e}}_r)\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\iint_{S_\epsilon}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8\pi}{3}$$