Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004-05-25, kl. 14.00-19.00

5B1117 Matematik III för E och ME

Hjälpmedel: Bifogat formelblad. Miniräknare är ej tillåten.
För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs preliminärt 11, 17 respektive 23 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering. Bristfälliga motiveringar medför poängavdrag. Uppgiftsformuleringarna behöver inte lämnas in. Lösningsförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.

1. Beräkna integralen $\int_D \frac{x^3}{1+y^5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, där $D = \{(x,y) : 0 < x < 2y < 1\}$. (3p)

2. Låt $\boldsymbol{a}$ vara en konstant vektor, och $\boldsymbol{r}$ ortsvektorn.
   Beräkna
   a) $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})$ (1p)
   b) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$ (1p)
   c) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$ (1p)

3. Bestäm konvergensmängden till serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n^2}.$$
(3p)

4. a) Visa att den generaliserade integralen
$$\iint_{\mathbf{R^2}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
   är konvergent och beräkna dess värde. (2p)
   b) Beräkna integralen
$$\iint_{\mathbf{R^3}} e^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$
   Ledning: Använd resultatet av a) för att först beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. (1p)

5. Hastighetsfältet från en virvel längs z-axeln ges i cylinderkoordinater av

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi.$$

Undersök om $\mathbf{v}$ har, åtminstone i någon del av rummet,
a) en skalär potential; (1p)
b) en vektorpotential. (1p)
c) Bestäm de potentialer som existerar, och ange lämpliga definitionsområden för dem. (2p)

6. Beräkna tyngdpunkten

$$\boldsymbol{r}_{TP} = \frac{\iint_S \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_S \mathrm{d}\sigma}$$

för den yta S som definieras av

$$S: \quad x+y+z=1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

och är försedd med konstant masstäthet. (4p)

7. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, där

$$\boldsymbol{F} = \frac{(x-1, y)}{x^2-2x+y^2}$$

och kurvan L går från $(4,0)$ till $(-4,0)$ längs parabeln $y = x^2 - 16$. (4p)

8. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = \frac{(\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}|^5}\,\boldsymbol{r}$$

ut genom en godtycklig sluten yta S som begränsar ett område V som innehåller origo ($\boldsymbol{r}$ betecknar som vanligt ortsvektorn, dvs. $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, och $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} = (0, 0, 1)$).

(4p)

LYCKA TILL!