Institutionen för matematik
KTH

Lösningsförslag till tentamensskrivning, 2004-08-25

5B1117 Matematik III för E och ME

1. Kalla projektionen av den aktuella delen av konen på xy-planet för D. Arean av delen av konen kan beräknas som en integral över D enligt

$$A = \iint_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \sqrt{1+(\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D \sqrt{1+\frac{9x^2}{x^2+y^2}+\frac{9y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \sqrt{10}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{10}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Området D är en triangel med arean $\frac{1}{2}$, vilket ger att delen av konen har arean $A = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

2. Områdets geometri inbjuder till att integrera i x-led först.

$$\iint_D (2x+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=-2}^{2}\int_{x=1}^{5-y^2}(2x+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=-2}^{2}\left[\frac{2x^2}{2}+y^2x\right]_{x=1}^{5-y^2}\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{y=-2}^{2}\big((5-y^2)^2+y^2(5-y^2)-1-y^2\big)\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2}(24-6y^2)\mathrm{d}y = \Big[24y-2y^3\Big]_{-2}^{2} = 64$$

3. a) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$ är noll för alla skalärfält U, eftersom vektorfält som är lika med gradienten av ett skalärfält är konservativa (U är då vektorfältets potential) och därmed rotationsfria.

   b) Formelbladet ger uttrycket för $\operatorname{div}\operatorname{grad} U$ i sfäriska koordinater. Man kan antingen derivera uttrycket direkt som det är, eller förenkla det först genom att använda att $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, vilket ger

$$U = r^3\sin^2\theta$$

Om vi börjar med denna förenkling, får vi:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\,\frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{r\sin\theta}{r}\,\frac{\partial U}{\partial\theta}) + 0\Big] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2(3r^2\sin^2\theta)\big) + \frac{r^3}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta)\big) =$$

$$= \frac{12r^3\sin^2\theta}{r^2} + \frac{r}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)\big) =$$

$$= 12r\sin^2\theta + \frac{2r}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta\cos\theta) = 12r\sin^2\theta + \frac{2r}{\sin\theta}(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta) =$$

$$= 12r\sin^2\theta + 4r\cos^2\theta - 2r\sin^2\theta = 10r\sin^2\theta + 4r\cos^2\theta = 4r + 6r\sin^2\theta$$

4. Fältet är deriverbart överallt och saknar singulära punkter. Eftersom ytintegralen innehåller en rotation skalärmultiplicerad med ett vektoriellt ytelement kan vi omvandla den till en kurvintegral längs med randkurvan mha Stokes' sats. Randkurvan erhålls då $x^2 + y^2 = 1$, vilket ger $z = -(x^2 + y^2) = -1$. Vi får:

$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma = \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \Big\{ z = -1 = \text{konstant } \Rightarrow \boldsymbol{F} = (-y, x, 0) \Big\} =$$

$$= \int_\Gamma (-y, x, 0) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Denna kurvintegral kan vi antingen lösa direkt, eller omvandla till en ytintegral över en enklare yta. Om vi väljer en plan inspänd yta S_2, så får vi:

$$S_2: \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = -1, \quad \hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Stokes' sats ger nu:

$$\int_\Gamma (-y, x, 0) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{S_2} \operatorname{rot}(-y, x, 0) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z \mathrm{d}\sigma = \iint_{S_2} (0, 0, 2) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z \mathrm{d}\sigma = 2 \iint_{S_2} \mathrm{d}\sigma = 2\pi$$

där vi har använt att ytan S_2 är en cirkelskiva med radien 1, och därför har arean π.

5. Eftersom U bara beror på r så blir uttrycket för ΔU i sfäriska koordinater

$$\Delta U = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}) \right) = \frac{1}{r^2} (r^2 U'(r))'.$$

Därmed blir ekvationen för U

$$-\frac{1}{r^2} (r^2 U'(r))' = \frac{2}{r^4},$$

som ger

$$(r^2 U'(r))' = -\frac{2}{r^2},$$

$$r^2 U'(r) = \frac{2}{r} + A,$$

$$U' = \frac{2}{r^3} + \frac{A}{r^2},$$

$$U = -\frac{1}{r^2} - \frac{A}{r} + B$$

$(r > 1)$, där A och B är godtyckliga konstanter.

6. Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är definierat och kontinuerligt deriverbart överallt, och man räknar lätt ut att $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$. Alltså är $\boldsymbol{F}$ konservativt och vi byta ut den angivna integrationsvägen mot vilken som helst kurva som går mellan samma punkter, nämligen från $(1, 0, 0)$ till $(-1, 0, 3\pi)$. Om vi exempelvis väljer den räta linjen L, parametriserad genom

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 0 \\ z = 3\pi t \end{cases}$$

(eller $\boldsymbol{r}(t) = (1-2t,\, 0,\, 3\pi t)$), $0 \le t \le 1$, så får vi

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (e^{3\pi t}, -2 \cdot 0, (1-2t)e^{3\pi t}) \cdot (-2, 0, 3\pi)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (-2e^{3\pi t} + 3\pi(1-2t)e^{3\pi t})\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (-2e^{3\pi t}\,\mathrm{d}t + [(1-2t)e^{3\pi t}]_0^1 - \int_0^1 (-2e^{3\pi t})\,\mathrm{d}t$$

$$= [(1-2t)e^{3\pi t}]_0^1 = -e^{3\pi} - 1.$$

Det går också bra att integrera direkt, utan att byta integrationsväg.

7. a) Ortsvektorn som funktion av u och v är $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = (u^2 - v^2,\, 2uv)$. Detta ger

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (2u,\, 2v),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (-2v,\, 2u).$$

Vi finner omedelbart att $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = 2u \cdot (-2v) + 2v \cdot 2u = 0$, dvs att de onormerade basvektorerna $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ är ortogonala. De försvinner i origo (svarande mot $u = v = 0$) men är för övrigt skilda från noll. Det följer att (u, v) är åtminstone lokalt väldefinierat som koordinatsystem, samt ortogonalt, utanför origo.

Skalfaktorerna är

$$h_u = \|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\| = \sqrt{(2u)^2 + (2v)^2} = 2\sqrt{u^2 + v^2},$$

$$h_v = \|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\| = \sqrt{(-2v)^2 + (2u)^2} = 2\sqrt{u^2 + v^2},$$

vilket ger enhetsvektorerna

$$\hat{\boldsymbol{e}}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \frac{(u,\, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{(-v,\, u)}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

b) Vi söker ett område D i (u, v)-planet (och ej innehållande origo) och ett motsvarande område Ω i (x, y)-planet så att det för varje $(x, y) \in \Omega$ finns exakt en lösning $(u, v) \in D$ till

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2uv. \end{cases}$$

Ett sätt att angripa uppgiften är att försöka lösa u och v i termer av x och y och identifiera områden där detta går bra. Uppgiften blir enklare ju mindre områden vi väljer, och vi kan därför begränsa oss till exempelvis kvartsplanet $u > 0$, $v > 0$. Då blir även $y > 0$.

Den andra ekvationen ger $v = \frac{y}{2u}$, vilket insatt i den första ger

$$4u^4 - 4u^2 - y^2 = 0.$$

Detta är en andragradsekvation för $2u^2$ med lösning

$$2u^2 = x \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Här är endast plustecknet aktuellt (eftersom vänsterledet är positivt) och vi får

$$u = \sqrt{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})}$$

(endast den positiva roten eftersom vi bestämde oss för att $u > 0$). Detta ger sedan

$$v = \frac{y}{2u} = \frac{y}{2\sqrt{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})}}.$$

Eftersom $x < \sqrt{x^2 + y^2}$ (då $y > 0$) är ovanstående uttryck för u och v meningsfulla, och de inverterar de ursprungliga ekvationerna med området
$D = \{(u, v) : u > 0, \ v > 0\}$ exakt svarande mot $\Omega = \{(x, y) : y > 0\}$.

Anm: Efter förlängning med "konjugatkvantitetblir formeln för v på samma form som den för u:

$$v = \sqrt{\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + y^2})}.$$

8. a) Vi tittar först på konvergensradien. Kvotkriteriet ger att denna är

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1/(n-1)n}{1/n(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n-1} = 1.$$

I ändpunkterna $x = \pm 1$ har vi absolutkonvergens:

$$\sum \left|\frac{(\pm 1)^{n+1}}{n(n+1}\right| = \sum \frac{1}{n(n+1} \leq \sum \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Det följer att konvergensmängden är $-1 \leq x \leq 1$.

b) Deriverar vi $f(x)$ termvis två gånger för $-1 < x < 1$ och använder formeln för den geometriska seriens summa får vi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

c) Nu integrerar vi det sista uttrycket för $f''(x)$ för att få $f'(x)$ och $f(x)$ på sluten form. Först får vi

$$f'(x) = -\ln(1-x) + A.$$

Eftersom $f'(0) = 0$ (se serieuttrycken ovan) s
a får vi $A = 0$ (integrationskonstanten) och därmed $f'(x) = -\ln(1-x)$.

Ytterligare en integration ger (substituera $t = 1 - x$ och använd
$\int \ln t \, dt = t \ln t - t + \text{konst}$)

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) - (1-x) + B.$$

Eftersom $f(0) = 0$ får vi $B = 1$ och därmed svaret

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$$