Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004-08-25, kl. 14.00-19.00

5B1117 Matematik III för E och ME

Hjälpmedel: Bifogat formelblad. Miniräknare är ej tillåten.
För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs 11, 17 respektive 23 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering. Bristfälliga motiveringar medför poängavdrag. Uppgiftsformuleringarna behöver inte lämnas in. Lösningsförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.

1. Beräkna arean av den del av konen

$$z = 4 + 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

som ligger ovanför triangeln i xy-planet med hörn i punkterna $(x, y) = (0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$. (3p)

2. Beräkna integralen $\iint_D (2x + y^2)\,dx dy$, där D är det plana område som begränsas av parabeln $x + y^2 = 5$ och den räta linjen $x = 1$. (3p)

3. Ett skalärfält definieras i sfäriska koordinater av $U = r^3(\cos^2\theta - \cos 2\theta)$.

   a) Bestäm $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U$.

   b) Bestäm $\operatorname{div} \operatorname{grad} U$.

   (3p)

4. Beräkna

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$$

då

$$\mathbf{F} = (yz,\ -xz,\ 0)$$

och S är ytan som definieras av

$$S: \quad z + x^2 + y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 \le 1$$

och normalvektorn $\hat{\mathbf{n}}$ har positiv z-komponent. (3p)

5. Ett gasmoln omger en sfärisk kropp i rymden. För $r > 1$ ges gasmolnets täthet av

$$\rho(r) = \frac{2}{r^4}$$

uttryckt i sfäriska koordinater (r, θ, φ). Gravitationspotentialen U som alstras av gasmolnet uppfyller Poissons ekvation

$$-\Delta U = \rho.$$

Bestäm alla sfäriskt symmetriska lösningar $U = U(r)$ till denna ekvation för $r > 1$. (4p)

6. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (e^z, -2y, xe^z)$ och Γ är spiralkurvan

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

där parametern t går från 0 till 3π. (4p)

7. I (x, y)-planet införs kroklinjiga koordinater u och v genom

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv. \end{cases}$$

a) Visa att (u, v) bildar ett ortogonalt koordinatsystem, bestäm skalfaktorerna h_u, h_v och enhetsvektorerna $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{u}$, $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{v}$. (2p)

b) Punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$ i (u, v)-planet motsvarar samma punkt i (x, y)-planet. Transformationen $(u, v) \mapsto (x, y)$ är alltså inte en-entydig om den tänkes definierad i hela (u, v)-planet. Bestäm ett område i (u, v)-planet och ett i (x, y)-planet så att $(u, v) \mapsto (x, y)$ förmedlar en en-entydig avbildning av det ena området på det andra. (2p)

8. a) Bestäm konvergensmängden för potensserien

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

(1p)

b) För x i det inre av konvergensmängden är funktionen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ deriverbar hur många gånger som helst. Beräkna andraderivatan $f''(x)$ på sluten form (alltså utan summatecken). (1p)

c) Beräkna $f(x)$ på sluten form. (2p)

LYCKA TILL!