LÖSNINGSFÖRSLAG Del A, 3p per uppgift

1. Hitta alla heltalslösningar till ekvationen $325x + 26y = 91$.

   Förkorta med 13. Ekvationen blir då $25x + 2y = 7$ och med hjälp av Eulkides baklänges - eller direkt - får vi partikulära lösningen $x_P = 1, y_P = -9$; eller $x_P = 7, y_P = -84$. Allmäna lösningen till $25x + 2y = 0$ är $x_H = -2n, y = 25n$ och fullständiga lösningen blir

   $$x = 1 - 2n; \text{ och } y = -9 + 25n.$$

2. En funktion $f : S_5 \to S_5$ avbildar varje permutation π på $(12)(354) \times \pi$. Förklara varför f är en bijektion. Ange inversen till f explicit.

   Multiplikationen med $(12)(345)$ är en permutation av elementen i S_5. Inversen ges av multiplikationen med inversen till $(12)(345)$, som är $(12)(354)$.

3. Hur många icke-negativa lösningar har ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$?

   Eller: Det finns röda, gröna, gula och svarta bollar. Vi måste välja 11. Oordnat val med repetition. Svar: binomialkoefficienten (4+11-1 , 11) dvs "14 över 11"

4. Hitta alla x i $\mathbf{Z}_{200}$ som uppfyller $x^{80} + 199 = 0$.

   Eulerfunktionen $\varphi(200) =$ (alla tal ≤ 200) $-$ (delbara med 2) $-$ (delbara med 5) $+$ (delbara med 10) $= 200 - 100 - 40 + 20 = 80$. Enligt Eulers sats är $x^{\varphi(200)} = 1$ i $\mathbf{Z}_{200}$. Således alla x i $\mathbf{Z}_{200}$ uppfyller villkoren.

5. Rita undergruppsgallert för gruppen C_{24}.

   Gruppen är cyklisk och då har bara cykliska undergrupper. Låt c vara generatorn för C_{24}. Då har dess potenser fljande ordningar:

   $c, c^5, c^7, c^{11}, c^{13}, c^{17}, c^{19}, c^{23}$ har ordning 24; $c^2, c^{10}, c^{14}, c^{22}$ har ordning 12; c^3, c^{15}, c^{21}, c^9 har ordning 8; c^4, c^{20} har ordning 6; c^6, c^{18} har ordning 4; c^8, c^{16} har ordning 3; c^{12} har ordning 2.

   Undergrupper: av ordning 12: $[1, c^2, c^4, c^6, ..., c^{22}]$, av ordning 6: $[1, c^4, c^8, c^{12}, c^{16}, c^{20}]$, av ordning 3: $[1, c^8, c^{16}]$; av ordning 8: $[1, c^3, c^6, c^9, c^{12}, c^{15}, c^{18}, c^{21}]$, av ordning 4:$[1, c^6, c^{12}, c^{18}]$ och av ordning 2:$[1, c^{12}]$.

6. En *mättad cyklisk kolhydrat* kan representeras av en sammanhängande graf med följande egenskaper: (i) Högsta valensen är 4 samt (ii) det finns exakt en cykel. Lista alla mättade cykliska kolhydrater med 5 kolatomer genom att rita motsvarande grafer (som har fem hörn). Motivera ditt svar.

   Det kan bara finnas en 5-cykel, en 4-cykel (och ett hörn utanför) eller en 3-cykel (och 2 hörn utanför). ALltså:

   En 5-cykel, en 4-cykel med ett ben, en 3-cykel med 2 ben, en 3-cykel med 2 antenner, en 3-cykel med med en 2-svans.

Del B, 4p per uppgift

7. Betrakta gruppen G av alla symmetrier till en regelbunden 6-hörning. Skriv multiplikationstabellen i G (2p). Visa att $[G,G] = \{aba^{-1}b^{-1} \big| a, b \in G\}$ är en undergrupp i G (1p). Lista dess vänstra sidoklasser i G (1p).

   v är vridning 60 grader medurs, s är spegling av hela sexhörningen.

   $$G = \{1, v, v^2, v^3, v^4, v^5, s, sv, sv^2, sv^3, sv^4, sv^5\}$$

   och $v^6 = s^2 = 1; sv = v^5 s$.

   Varje element kan skrivas som $s^k v^l$ där k är 0 eller 1 och $l = 0, 1, ..., 5$. Dess invers är $v^{6-l}s^k$. Eftersom potenser av v kommuterar med alla element i G, är intressanta fallet när $a = sv^l$ och $b = sv^q$. Då är

   $$aba^{-1}b^{-1} = (sv^l)(sv^q)(v^{6-l}s)(v^{6-q}s).$$

   Använder vi att $sv = v^5 s$ så ser vi att produkten ovan kan bara vara lika med $1, v^4, v^8$. Så

   $$H = [G,G] = \{1, v^4, v^2\}$$

   Sidoklasserna är $H, vH = v^3H = v^5H = \{v, v^3, v^5\}, svH = sv^3H = sv^5H = \{sv, sv^3, sv^5\}, sv^2H = sv^4H = sH = \{s, sv^2, sv^4\}$.

8. Låt S vara en mängd med n element. Hur många par (A, B) av delmängder till S finns det om A måste vara en delmängd av B? OBS: En delmängd behöver inte vara äkta; par (A, A) räknas.

   Dela upp S i tre disjunkta delmängder : $A, B - A$ och $S - B$. Vart och ett av n element i S har då tre säckar att hamna i. Totala antalet möjligheter är 3^n.

9. Bevisa att om a, b är heltal, så är $2^a - 1 \bmod 2^b - 1 = 2^{a \bmod b} - 1$. Beteckningen $x \bmod y$ syftar på resten vid divisionen av x med y.

   Låt $r = a$ mod b; således $a = bx + r$ enligt divisionsalgoritmen.

   $$2^a - 1 = 2^{bx+r} - 1 = 2^{bx+r} - 2^r + (2^r - 1) = 2^r(2^{bx} - 1) + (2^r - 1).$$

   Observera att $2^{bx} - 1 = (2^b - 1)(1 + 2^b + 2^{2b} + ... + 2^{(x-1)b})$ från en geometrisk serie med kvoten 2^b (alternativt dela polynomet $z^{xb} - 1$ med $z^b - 1$ och sätt in 2).

   Således $2^a - 1 = (2^b - 1)2^r(1 + 2^b + 2^{2b} + ... + 2^{(x-1)b}) + (2^r - 1)$; den sökta divisionsresten är $2^r - 1$.

10. Ge ett bevis på att Q_k är en k-reguljär bipartit graf fór alla k.

    I varje hörn v (ord av längd k) så kan vi ändra på k bokstäver och dessa blir precis de hörn som är förbundna med v. Så v har valens k. Är k jämnt, så har vi alla hörn där det finns jämnt antal 1 och jämnt antal 0 och dessa är aldrig grannar med varandra utan enbart med dem som har udda antal 0 och udda antal 1. Dessa i sin tur är aldrig grannar med varandra. För udda k är den sökta tudelningen {hörn med udda antal 1 och jämn antal 0} och {hörn med jämn antal 1 och udda antal 0}. Tudelningen garanterar att Q_k är bipartit.