Media 1/IT 1. Vi kan först dela med 11 och får då den ekvivalenta ekvationen: $11m + 6n = 50$. Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 11 &= 6 + 5 \\ 6 &= 5 + 1. \end{aligned}$$

Så går vi baklänges får vi

$$\begin{aligned} 1 &= 6 - 5 \\ 1 &= 6 - (11 - 6) = 2 \cdot 6 - 11. \end{aligned}$$

Det ger lösningar $(m_0, n_0) = (-1, 2)$ till ekvationen $11m_0 + 6n_0 = 1$ och det ger att en lösning till vår ekvation är $(m, n) = (-50, 100)$. Antag att (m', n') är en annan lösning. Då får vi att

$$11(m - m') = 6(n' - n), \tag{1}$$

vilket, då $SGD(11, 6) = 1$, ger att $11|(n' - n)$ och $6|(m - m')$. För att uppfylla (1) måste vi alltså ha $m' = m + 6k$ och $n = n' - 11k$. Den allmänna lösningen blir därmed

$$\begin{aligned} m &= -50 + 6k \\ n &= 100 - 11k. \end{aligned}$$

Media 2/-. Funktionen är injektiv för om $f(x) = f(y)$ måste först och främst x och y bägge vara jämna eller bägge udda, och i det förra fallet får vi $2x + 1 = 2y + 1$, vilket ger $x = y$, och i det snare fallet får vi $2x = 2y$ vilket också direkt ger $x = y$. Funktionen är inte surjektiv för det är bara vissa jämna tal som ligger i bilden. Exempelvis finns det inte något tal som går på 4. Följdaktligen kan funktionen inte heller vara bijektiv.

Media 3/IT 2. Vi använder sållprincipen och tar bort de fall där två kvinnor eller två hundar står bredvid varandra. Totalt finns det 19! sätt att permutera varelserna. Två kvinnor kan väljas på $\binom{6}{2}$ sätt och det paret tillsammans med de övriga 17 gör 18 varelser att permutera; alltså en faktor 18!. De två kvinnorna kan också flyttas om inom paret, vilket ger en faktor 2!. Nu har vi dock räknat dubbelt och måste ta bort de fall där 3 kvinnor står bredvid varandra osv. Det ger

$$\binom{6}{2}18!2! - \binom{6}{3}17!3! + \binom{6}{4}16!4! - \binom{6}{5}15!5! + \binom{6}{6}14!6!$$

att subtrahera. Motsvarande för hundarna ger ytterligare

$$\sum_{i=2}^{8}(-1)^i\binom{8}{i}(19 - i + 1)!i!$$

att subtrahera. Vi måste också ta hänsyn till blandfallen

$$\sum_{i=2}^{8}\sum_{j=2}^{6}(-1)^{i+j}\binom{8}{i}\binom{6}{j}(19 - i + 1 - j + 1)!i!j!$$

som ska läggas till. Sammantaget ger det alltså

$$19! - \sum_{j=2}^{6}(-1)^j\binom{6}{j}(19-j+1)!j!$$
$$-\sum_{i=2}^{8}(-1)^i\binom{8}{i}(19-i+1)!i! + \sum_{i=2}^{8}\sum_{j=2}^{6}(-1)^{i+j}\binom{8}{i}\binom{6}{j}(19-i-j+2)!i!j!$$

Media 4/IT 3. Vi löser först systemet i $\mathbf{Q}$. På matrisform blir systemet

$$\left(\begin{array}{rr|r} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right) [R1-R2] \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right) [R2-2*R1] \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -11 & -4 \end{array}\right)$$

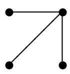
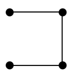
Vi multiplicerar sedan Rad2 med $\frac{-1}{11}$ och får

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4/11 \end{array}\right) [R1-4*R2] \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 6/11 \\ 0 & 1 & 4/11 \end{array}\right)$$

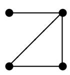
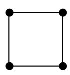
Lösningen i $\mathbf{Q}$ blir alltså $x = 6/11$ och $y = 4/11$. I $\mathbf{Z}_9$ kan vi göra på samma sätt. Eftersom $-11 = 7 \pmod 9$ och $SGD(7,9) = 1$ går det bra att dela med -11. Modulo 9 är $\frac{-1}{11} \equiv 4$ så lösningen blir nu $x \equiv -6 \cdot 4 \equiv 3$ och $y \equiv -4 \cdot 4 \equiv 2$.(Observera också att $11 \equiv 2 \pmod 9$ och $6/2 = 3$, $4/2 = 2$.)

Media 5/IT 4. Om vi skriver $C_{36} = \langle x \rangle$ så blir delgrupperna $C_{18} = \langle x^2 \rangle$, $C_{12} = \langle x^3 \rangle$, $C_9 = \langle x^4 \rangle$, $C_6 = \langle x^6 \rangle$, $C_4 = \langle x^9 \rangle$, $C_3 = \langle x^12 \rangle$, $C_2 = \langle x^18 \rangle$, och slutligen $C_1 = \langle 1 \rangle$, som inses lätt då delgruppernas ordningar ska dela ordningen hos gruppen. Hur delgrupperna hänger ihop följer på samma sätt. C_1 är delgrupp till alla andra delgrupper, C_2 är delgrupp till alla delgrupper vars ordning är delbar med 2, dvs C_4, C_6, C_{12}, C_{18} och C_{36}. C_3 är delgrupp till alla vars ordning är delbar med 3, dvs C_6, C_9, C_{18} och C_{36}. C_4 är delgrupp till C_{12} och C_{36}, C_6 är delgrupp till C_{12}, C_{18} och C_{36}, C_9 är delgrupp till C_{18} och C_{36}, C_{12} och C_{18} är bara delgrupper till C_{36}.

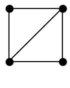
Media 6/IT 5. Eftersom vi är intresserade av klassificera graferna upp till isomorfi, och graferna ska vara sammanhängande, kan vi anta att hörnet 1 är förbundet med hörn 2 och hörn 3. Beroende på hur vi förbinder det sista hörnet får vi något av följande träd

$G1$:  $G2$: 

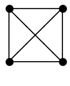
Vi kan sedan fortsätta att lägga till kanter och får då först

$G3$:  $G4$: 

sedan

$G5$: 

och slutligen

$G5$: 

Som vi redan har sagt är det bara G1 och G2 som är träd eftersom alla andra har cykler. I en reguljär graf ska alla valenserna vara lika så vi ser direkt att G2, G4 och G6 är reguljära men inga av de övriga. En graf som innehåller en 3-cykel kan inte vara bipartit, vilket utesluter G3, G5 och G6. Övriga inses lätt vara bipartita, t ex genom att börja i något löv och sedan alternera färgerna för varje steg.

Media 7/IT 6. a) A_4 består av jämna permutationer i S_4. produkten av 2 jämna permutationer är igen en jämn permutation; alltså är A_4 sluten under multiplikation. Enligt sats 13.7 i gamla upplagan/ 20.7 i den nya medför det att A_4 är en grupp.

b) A_4 har $24/2 = 12$ element och dessa är

$$\begin{array}{cccc} (123), & (124), & (234), & (134) \\ (132), & (142), & (243), & (143) \\ (12)(34) & (13)(24) & (14)(23) & id. \end{array}$$

Alla 3-cykler har ordning 3 och kan då inte ingå i en delgrupp av ordning 4. t_1, t_2 och t_3 har ordning 2 och dessutom är

$$t_1t_2 = t_3,\ t_2t_3 = t_1,\ t_3t_1 = t_2.$$

Detta betyder att $H = \langle id, t_1, t_2, t_3\rangle$ är en delgrupp av ordning 4 till A_4. H är då ej cyklisk då den ej innehåller element av ordning 4.

c) De vänstra sidoklasserna är

$$\begin{aligned} H &= \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \\ (123)H &= \{(123), (134), (243), (142)\} \\ (132)H &= \{(132), (234), (124), (143)\}. \end{aligned}$$

Det här är alla sidoklasser för $3 \cdot 4 = 12$, gruppens ordning.

Media 8/IT 7. Vi har förstås att $x^2 \equiv 1 \pmod p$ är ekvivalent med $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod p$ och det kan skrivas om som $(x + 1)(x - 1) \equiv 0 \pmod p$. Då p är ett primtal ger det att någon faktor måste vara noll, dvs $x \equiv 1 \pmod p$ eller $x \equiv -1 \equiv p - 1 \pmod p$ vilket skulle visas. Att bara 1 och p-1 är lösningar till ekvationen $x^2 \equiv 1 \pmod p$ betyder att övriga element inte är lika med sina inverser. Vi vet dessutom att inverserna är unika, varje element($\neq 0$) har sin egen invers. Eftersom produkten $(p - 1)!$ innehåller alla tal från 1 till p-1 så förekommer, för varje tal $\neq 1$, eller $p - 1$, både talet och dess invers. Produkten kan därför förenklas till $(p - 1)! \equiv (p - 1) \cdot 1 \equiv -1 \pmod p$.

Media 9/IT 8. Enligt förutsättningarna har grafen $n_1 + \ldots + n_m$ hörn. Betrakta någon av mängderna, säg X_i. Låt A vara något hörn som ligger i X_i. Det finns $n_1 + \ldots n_{i-1} + n_{i+1} + \ldots + n_m$ kanter som hör till A. Alltså finns det $n_i(n_1 + \ldots n_{i-1} + n_{i+1} + \ldots + n_m)$ kanter som utgår från X_i. Vi har nu fått att

$$\sum_i n_i \sum_{j \neq i} n_j = \sum_{i \neq j} n_i n_j$$

kanter utgår från alla hörn av grafen. Eftersom varje kant hör till två hörn, betyder det att det finns

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} n_i n_j = \sum_{i<j} n_i n_j$$

hörn i grafen.

Media 10/IT 9. Hur ser en sådan bitsträng ut? Först har vi en sträng 1:or, x_1 stycken, sedan 0:or, x_2 stycken, sedan 1:or igen, x_3 stycken, sedan 0:or igen, x_4 stycken, sedan 1:or igen, x_5 stycken, och slutligen kan det avslutas med en sträng med 0:or, x_6 stycken. Delen x_2 0:or och x_3 1:or garanterar en 01:a och delen x_4 0:or och x_5 1:or garanterar nästa 01:a. Eftersom längden ska vara 10 har vi att

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10. \tag{2}$$

De x_1 1:orna i början och de x_6 0:orna i slutet är bara utfyllnad. En annan formulering blir alltså hur många positiva heltalslösningar ekvationen (2 har under förutsättning att $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 1$, $x_4 \geq 1$ och $x_4 \geq 1$. Genom att göra variabelbytet $x_2 = y_2 + 1$, $x_3 = y_3 + 1$, $x_4 = y_4 + 1$ och $x_5 = y_5 + 1$ får vi ekvationen

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + x_6 = 6 \tag{3}$$

och problemet kan nu formuleras om till att finna antalet positiva heltalslösningar till den ekvationen. Enligt formeln för oordnat val med repetition är antalet lösningar till (3)

$$\binom{6+6-1}{6} = \binom{11}{5}$$

-/IT 10. Se boken avsnitt 17.4.