LÖSNINGSFÖRSLAG till 5B1118-tentan 16/01/2004

1. För $n = 1$ är $M = \{1\}$ och delmängderna är Øoch M. Antag att för $n = p$ antalet delmängder är 2^p. För $n = p + 1$ finns det en extra element i M, nämligen talet $p + 1$ som inte ingår i vissa delmängder till M. Dessa är då delmängder av en mindre mängd $M \setminus \{p + 1\}$ med p element och det finns 2^p av dem enligt induktionshypotesen. Resten av delmängderna till M fås genom att lägga $p + 1$ till dessa. Totalt blir det $2^p + 2^p = 2^{p+1}$ stycken.

2. Euklides algoritm på 26 och 15 ger $1 = -4 \cdot 26 + 7 \cdot 15$. Den allmänna lösningen är $x_0 = 933 \cdot 7 + -26n, y_0 = 933 \cdot (-4) + 15n, n \in \mathbf{Z}$. För att lösningarna skall vara positiva måste följande olikheter uppfyllas:$n \leq 7 \cdot 933/26$ och $n \geq 4 \cdot 933/15$. Detta ger 3 möjliga värden på n: 249,250, 251.

Sökta paren av x, y är (57,3), (31,18), (5,33).

3. Svaret är summan av följande delfall:
<u>3 ingredienser valda.</u>
Alla 3 ingredienser är olika: $15 \cdot 14 \cdot 13/3!$
2 är samma och 1 till: $15 \cdot 14$
3 är samma: 15
<u>2 ingredienser valda.</u>
bägge är samma: 15
bägge är olika: $15 \cdot 14/2$
<u>1 ingrediens vald.</u> 15

4. $667 = 23 \cdot 29$ och således $m = 22 \cdot 28 = 616$. Dekrypterar med d som måste uppfylla $ed = 1$ modulo 616.

Lösning av ekvationen $3d = 616k + 1$ ger $d = 411$. Nu dekrypterar vi genom att beräkna 2^{411} modulo 667 vilket är 200.

5. Eftersom (123) och (234) är jämna, kommer den sökta undergruppen bestå av jämna permutationer. Dessutom är $(234)(123) = (13)(24)$. Undergruppen innehåller alltså alla jämna permutationer.

Dessa är (123), (132), (124), (142), (143), (134), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23), och id = (1)(2)(3)(4).

7. Fibonacciföljden börjar med 2 ettor (udda), tredje talet blir jämnt (BAS). Varje gång a_n är jämnt (HYPOTES), så blir a_{n+1}, a_{n+2} udda och a_{n+3} jämnt igen (ÖVERGÅNG). Enligt induktionsprincipen är vart tredje tal i Fibonacciföljden jämnt.

8. Man inser lätt att 1 och -1 kommuterar med alla element, men $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$. Undergrupperna är $K = \{1, -1\}$ och $G_1 = \{i, -i, 1, -1\}, G_2 = \{j, -j, 1, -1\}, G_3 = \{k, -k, 1, -1\}$.

9. Låt G vara en bipartit graf med v_1 hörn på västkusten och $v_2 \geq v_1$ hörn på ostkusten. Antal hörn hos en sådan graf kan högst vara $e = v_1 \cdot v_2$. Vi vet

också att $v_1 + v_2 = v$, en konstant. Produkten e är maximal när $v_1 = v_2 = v/2$ (på samma sätt som kvadraten har störst area bland alla rektanglar med sidorna v_1, v_2 och omkretsen $2v$) och i övriga fall $e \leq (v/2)(v/2) = v^2/4$.

10. Vi har våra heltal $a_1, ..., a_m$.

Skapa följande m stycken delsummor: $d_j = \sum_1^j a_i$. Om alla har olika rest vid division med m så måste en av dem ge rest 0. Om d_k och d_l ger samma rest vid division med m, så är $d_k - d_m \ = \sum_{m+1}^k a_i$ delbar med m.