Institutionen för Matematik
KTH
Mattias Dahl

Lösningar till Tentamen, Baskurs i Matematik, 5B1121, 4p

Torsdagen 9/1 2003 kl. 14.00–19.00.

1. Vi har

$$\begin{aligned}\sqrt{5+2x} = 1+x \quad &\Longleftrightarrow \quad 5+2x = (1+x)^2 \text{ och } 1+x \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 5+2x = 1+2x+x^2 \text{ och } x \geq -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4 = x^2 \text{ och } x \geq -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x = 2 \text{ eller } x = -2) \text{ och } x \geq -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 2.\end{aligned}$$

$x = 2$ är den enda lösningen till ekvationen.

2. Vi skriver om ekvationen för den givna linjen till

$$y = \frac{1}{5}(4x+1)$$

och vi ser att dess lutningskoefficient är $k = \frac{4}{5}$. Lutningskoefficienten k' för den sökta linjen uppfyller

$$-1 = k \cdot k' = \frac{4}{5}k'$$

så $k' = -\frac{5}{4}$. Den sökta linjen har en ekvation

$$y = -\frac{5}{4}x + A$$

där A är någon konstant. Eftersom $(-1, 2)$ ska ligga på linjen får vi

$$2 = \frac{5}{4} + A$$

eller $A = \frac{3}{4}$. Den sökta linjen har ekvation $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$ eller $5x + 4y = 3$.

3. Sätt $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ekvationen blir då $z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i$ och detta är uppfyllt om och endast om

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 3, \\ 2ab &= 4. \end{aligned}$$

Dessutom är $|z^2| = |3 + 4i|$, eller

$$a^2 + b^2 = 5.$$

Detta ger

$$2a^2 = 5 + 3 = 8, \quad 2b^2 = 5 - 3 = 2,$$

eller

$$a = \pm 2, \quad b = \pm 1.$$

Eftersom $2ab = 4$ får vi lösningarna

$$(a, b) = (2, 1), \quad (a, b) = (-2, -1),$$

eller

$$z = 2 + i, \quad z = -2 - i.$$

4. a) $\cos u = \cos v \iff u = \pm v + 2\pi n$ för något heltal n.
   b) $\sin u = \sin v \iff u = v + 2\pi n$ eller $u = \pi - v + 2\pi n$ för något heltal n.
   c) $\tan u = \tan v \iff u = v + \pi n$ för något heltal n

5. Vi kontrollerar först att identiteten stämmer för $n = 1$:

$$\frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2}.$$

Vi antar sedan att identiteten är sann för något heltal $n = k$:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

och visar med hjälp av detta antagande att den då också är sann för $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{(k+1)}} &= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{(k+1)}} \\ &= 2 - \frac{2(k+2) - k - 1}{2^{(k+1)}} \\ &= 2 - \frac{k+1}{2^{(k+1)}}. \end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen så är identiteten sann för alla heltal $n \geq 1$.

6. Detta är en geometrisk summa och vi beräknar den till

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{7}\right)^k &= \frac{2}{7}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{7}\right)^k \\ &= \frac{2}{7}\cdot\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^{(n-1)+1}-1}{\frac{2}{7}-1} \\ &= \frac{2}{5}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{7}\right)^n\right).\end{aligned}$$

7. Vi ser att $x = 1$ är en lösning till

$$p(x) = x^3 + 5x^2 + 7x - 13 = 0$$

och alltså kan polynomet $p(x)$ faktoriseras som

$$p(x) = (x-1)(Ax^2 + Bx + C).$$

Identifikation av koefficienterna ger $A = 1$, $B = 6$, $C = 13$. De två kvarvarande lösningarna till $p(x) = 0$ ges av

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 13 = 0 &\iff x^2 + 6x + 9 = -4 \\ &\iff (x+3)^2 = -4 \\ &\iff x + 3 = \pm 2i \\ &\iff x = -3 + 2i \text{ eller } x = -3 - 2i.\end{aligned}$$

Lösningarna till ekvationen är

$$x = 1, \quad x = -3 + 2i, \quad x = -3 - 2i.$$

8. a) Vi har

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^4 + (x+1)^4 \\ &= (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \\ &= 2x^4 + 12x^2 + 2. \end{aligned}$$

Eftersom f alltså är en jämn funktion så är tex. $f(1) = f(-1)$ så f är inte injektiv och har inte någon invers.

b) Här är

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^4 - (x+1)^4 \\ &= (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \\ &= -8x^3 - 8x \end{aligned}$$

vilket är en summa av två strängt avtagande funktioner. f är alltså strängt avtagande vilket innebär att f är injektiv och har en invers.

9. Enligt binomialformeln har vi

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^8 &= \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \cdot \left(x^2\right)^{8-k} \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \cdot x^{16-2k} \cdot (-3)^k \cdot x^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \cdot (-3)^k \cdot x^{16-3k}. \end{aligned}$$

Vi får en term med x^7 om $16 - 3k = 7$, dvs. om $k = 3$. Denna term är

$$\begin{aligned} \binom{8}{3} \cdot (-3)^3 \cdot x^7 &= -\frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot 3^3 \cdot x^7 \\ &= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 3^3 \cdot x^7 \\ &= -\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} \cdot 3^3 \cdot x^7 \\ &= -7 \cdot 8 \cdot 3^3 \cdot x^7 \\ &= -56 \cdot 27 \cdot x^7 \\ &= -1512 \cdot x^7. \end{aligned}$$

Koefficienten framför x^7 är -1512.

10. Vi visar först att

$$(m \text{ jämn}) \text{ eller } (n \text{ jämn}) \implies mn \text{ jämn}.$$

Om $m = 2p$ är jämnt så är produkten $mn = 2pn$, om $n = 2q$ är jämnt så är $mn = 2mq$. I båda fallen är mn ett jämnt tal.
Sedan visar vi att

$$(m \text{ udda}) \text{ och } (n \text{ udda}) \implies mn \text{ udda}.$$

Om m och n är udda kan vi skriva $m = 2p+1$, $n = 2q+1$, där p, q är heltal. Produkten mn blir

$$mn = (2p+1)(2q+1) = 2(2pq + p + q) + 1 = 2r + 1$$

där r är ett heltal. mn är alltså udda. Detta andra påstående är ekvivalent med

$$mn \text{ inte udda} \implies \text{inte } (\ (m \text{ udda}) \text{ och } (n \text{ udda})\ )$$

vilket är samma sak som

$$mn \text{ jämn} \implies (m \text{ jämn}) \text{ eller } (n \text{ jämn}).$$

Vi har visat att

$$(m \text{ jämn}) \text{ eller } (n \text{ jämn}) \iff mn \text{ jämn}.$$

11. Fixera ett tal $x \geq 0$. Vi visar att

$$(*) \qquad x^n \geq nx - (n-1)$$

för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ med induktion. För $n = 1$ säger (*) att

$$x \geq x$$

vilket är sant. Vi antar nu att (*) är sann för $n = k$ och använder detta antagande för att visa att (*) då är sann också för $n = k+1$ (observera att även villkoret $x \geq 0$ används i andra raden):

$$\begin{aligned} x^{k+1} - (k+1)x + k &= x \cdot x^k - (k+1)x + k \\ &\geq x \cdot (kx - (k-1)) - (k+1)x + k \\ &= kx^2 - 2kx + k \\ &= k(x-1)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

så $x^{k+1} \geq (k+1)x - k$. Enligt induktionsprincipen är (*) sann för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

12. Vänsterledet i ekvationen är en summa av sinus/cosinus-termer med samma period. Vi kan skriva denna summa som en sinusterm med en förskjutning av argumentet:

$$\sin(4x) + \cos(4x) = A\sin(4x + \phi).$$

För att bestämma konstanterna A och ϕ utvecklar vi

$$\sin(4x + \phi) = \cos(4x)\sin(\phi) + \sin(4x)\cos(\phi).$$

Likheten blir

$$\sin(4x) + \cos(4x) = A\cos(\phi)\sin(4x) + A\sin(\phi)\cos(4x)$$

och detta är uppfyllt för alla x om

$$A\cos(\phi) = 1, \quad A\sin(\phi) = 1$$

eller $A^2 = 2, \quad \tan(\phi) = 1$ så vi kan välja tex. $A = \sqrt{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$. Ekvationen vi ska lösa är ekvivalent med

$$\sqrt{2}\sin(4x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

eller

$$\sin(4x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Denna har lösningarna

$$4x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad 4x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

eller

$$x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}, \quad x = \frac{5\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}$$

för något heltal n.