Institutionen för Matematik
KTH

Tentamensskrivning 2003-9-29, kl. 08.00-13.00
5B1121 Baskurs i Matematik, 4p

Tentamen består av 12 uppgifter a 3 poäng. För godkänt betyg 3 fordras minst 15 poäng. För betyg 4 minst 22 poäng och för betyg 5 minst 29 poäng.

1. Låt $M_1 = [1, 2], M_2 = [-1, \frac{3}{2})$ och $M_3 = [-3, 0)$. Beskriv $M_2 \cap (M_1 \cup M_3)$, $M_3 \cap M_2$ och $M_2 \cup M_3$.

   Svar: $M_2 \cap (M_1 \cup M_2) = [-1, 0) \cup [1, \frac{3}{2})$, $M_3 \cap M_2 = [-1, 0)$ och $M_2 \cup M_3 = [-3, \frac{3}{2})$.

2. Lös ekvationen $\sqrt{2x^2 - 1} = x - 2$.

   Svar: Vi kvadrerar och får:

$$2x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4$$

   som är ekvivalent med

$$x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5) = 0$$

   Så $x = 1$ eller $x = -5$ är lösning av ekvationen. Sätter inn $x = 1$ i ursprunglig ekvation. Vänster: $\sqrt{2(1)^2 - 1} = 1$. Höger: $1 - 2 = -1$, och vi ser att Vänster $\neq$ Höger så $x = 1$ är inte lösning av ekvationen. På samma sätt ser man att $x = -5$ inte är lösning av ekvationen, vilket visar att ekvationen saknar lösning.

3. Beräkna alla x som satisfierar olikheten $|x - 3| \leq 4 - |x - 1|$.

   Svar: Del inn $\mathbf{R}$ i 3 intervall: $(-\infty, 1]$, $(1, 3]$ och $(3, \infty)$ och lös ekvationen separat på dom 3 intervallen. Svar: $x \in [0, 4]$.

4. Lös ekvationen $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$.

Svar: vi ser att $x = 1$ och $x = -1$ är lösninger, vilket medför att $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ delar polynomet $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$. Polynomdivisjon ger att $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x^2 - 1)(x - 2)(x - 3)$ och vi får att $x = -1, 1, 2, 3$ löser ekvationen.

5. Beskriv på parameterform linjen L genom punkterna $P(1, 3)$ och $Q(4, 2)$.

Svar: En parametrisering av linjen är på formen $\overline{OP} + t\overline{PQ}$ där $\overline{OP} = (1, 3)$ och $\overline{PQ} = (3, -1)$. Vi får att $(x(t), y(t)) = (1, 3) + (3t, -t) = (1+3t, 3-t)$. En parametrisering av linjen L är då till exempel $x(t) = 1 + 3t$ och $y(t) = 3 - t$.

6. Ge en ekvation i x och y som definierar linjen L genom punkterna $P(1, 3)$ och $Q(4, 2)$ från uppgift 6.

Svar: En ekvation som definierar linjen får vi genom att eliminera variabeln t från ekvationene $x(t) = 1 + 3t$ och $y(t) = 3 - t$. Tex. är $x + 3y = 10$ en ekvation som definierar linjen L.

7. Lös ekvationen $z^2 - (2 + 2i)z = 9 - 2i$

Svar: Vi kompletterar kvadratet och får ekvationen

$$z^2 - 2(1 + i)z + (1 + i)^2 - (1 + i)^2 = 9 - 2i$$

Förenkla:

$$(z - (1 + i))^2 = 9 - 2i + (1 + i)^2 = 9 - 2i + 1 + 2i + i^2 = 9$$

Ta kvadratrot och vi får $z = 4 + i$ eller $z = -2 + i$.

8. Bestäm värdemängden V_f och definitionsmängden D_f till funktionen $f(x) = \sqrt{3x - x^2 - 2}$.

Svar: Definisjonsmängden D_f til $f(x)$ är där den är definierad, dvs. där $3x - x^2 - 2 \geq 0$,vilket är intervallet $[1, 2]$. Värdemängden V_f är $[0, \frac{1}{2}]$.

9. Rita kurvan definierad av ekvationen $4y^2 - 9x^2 = 1$.

10. Lös ekvationen $\ln(x+1) + \ln(x+3) = 3\ln(2)$.

Svar: Förenkla ekvationen till

$$\ln(x+1)(x+3) = \ln 8.$$

Funktionen $\ln(x)$ är injektiv, så vi får att

$$(x+1)(x+3) = 8$$

som är ekvivalent med att

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Och vi får att x måste vara $x = -5$ eller $x = 1$. Vi ser att $x = -5$ inte kan vara lösning ($\ln(x)$ inte definierad för negativa x), men att $x = 1$ är lösning.

11. Beräkna alla x som satisfierar ekvationen $e^{2x} + e^x = 6$.

Svar: Sätt $w = e^x$. Vi får ekvationen

$$w^2 + w - 6 = 0$$

med lösningar $w = -3$ eller $w = 2$: Vi ser att $e^x = -3$ saknar lösning, och att $e^x = 2$ har lösningen $x = ln2$.

12. Låt $f(x)$ vara en inverterbar funktion med $D_f = V_f = \mathbf{R}$. Vis att $g(x) = \frac{1}{f(3x+2)-1}$ är inverterbar och bestäm $g^{-1}(x)$.

Svar: Antag att $g(a) = g(b)$. Detta implicerar att $f(3a+2) = f(3b+2)$ och sedan f är injektiv så måste $3a + 2 = 3b + 2$ vilket medför att $a = b$, så g är injektiv. Om man löser ekvationen $y = g(x)$ för x får man

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{3}(f^{-1}(\frac{1}{y} + 1) - 2).$$

Lycka till!