

Fasit för tentamenskrivning 2004-01-09, kl. 08.00-13.00
5B1121 Baskurs i Matematik, 4p

Tentamen består av 12 uppgifter a 3 poäng. För godkänt betyg 3 fordras minst 15 poäng. För betyg 4 minst 22 poäng och för betyg 5 minst 29 poäng.

1. Låt $z = 3 + 2i$. Beräkna ett komplext tal w så att $zw = 1$.

Svar: Vi söker et tal w på formen $a + ib$ så att $zw = 1$. Vi har:

$$w = \frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \dots = \frac{1}{13}(3-2i).$$

2. Beräkna $\sum_{k=1}^n (\frac{1}{2})^k$.

Svar: Vi har formeln $\sum_{k=0}^n aq^k = \frac{a(q^{n+1}-1)}{q-1}$, och får

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1.$$

Sätt $a = 1$ och $q = \frac{1}{2}$ i formeln. Dette ger

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} - 1 = \dots = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. Låt M vara linjen genom punkterna $(1, 0)$ och $(3, 2)$ i xy -planet. Bestäm ekvationen för linjen L som är normal till linjen M och går genom punkten $(2, 2)$.

Svar: L har ekvation på formen $y - y_0 = k(x - x_0)$, där (x_0, y_0) är et punkt på L och k är linjens lutning. Linjen M har lutning 1, och det följer att linjen L har lutning $k = -1$. Välj $(x_0, y_0) = (2, 2)$: Linjen L får ekvationen

$$y - 2 = -(x - 2)$$

som är ekvivalent med ekvationen

$$y = -x + 4.$$

4. Beskriv linjen L i uppgift 3 på parameterform.

Svar: Linjen L har ekvationen $y = -x + 4$. Välj tex. en parameter $x = t$. Vi får L på parameterform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5. Lös ekvationen $z^2 + 2(1+i)z + 8 - 4i = 0$.

Svar: Kvadratkomplettera ekvationen :

$$(z + (1+i))^2 = -8 + 6i.$$

Sätt $w = z + (1+i)$ som ger ekvationen

$$w^2 = -8 + 6i.$$

Ta kvadrroten av $-8 + 6i$: $\sqrt{-8 + 6i} = \pm(1 + 3i)$ som ger lösningar $z = 2i$ och $z = -2(1 + 2i)$.

6. För vilka x gäller olikheten

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x^2 - x + 4} < 0.$$

Svar: Faktorisering ger:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-4)} < 0.$$

Ett teckenschema för $f(x)$ ger att $f(x) < 0$ för $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, 4)$.

7. Lös ekvationen $|x-1| + |x+2| = 2x+3$.

Svar: På intervallet $(-\infty, -2)$ får man ekvationen

$$1 - x - 2 - x = 2x + 3$$

som är ekvivalent med ekvationen

$$-4 = 4x,$$

och ekvationen $-4 = 4x$ saknar lösning på $(-\infty, -2)$. På intervallet $[-2, 1]$ får man ekvationen

$$1 - x + x + 2 = 2x + 3$$

som är ekvivalent med ekvationen

$$0 = 2x.$$

Ekvationen $0 = 2x$ har lösningen $x = 0$ på intervallet $(-2, 1)$. På intervallet $(1, \infty)$ saknar ekvationen lösning, så lösningen av ekvationen $|x-1| + |x+2| = 2x+3$ är $x = 0$.

8. Lös ekvationen $x^4 + 7x^3 + 21x^2 + 37x + 30 = 0$.

Svar: Man ser att $x = -2$ och $x = -3$ löser ekvationen, så polynomdivisjon ger

$$x^4 + 7x^3 + 21x^2 + 37x + 30 = (x+3)(x+2)(x^2 + 2x + 5).$$

Polynomet $x^2 + 2x + 5$ har nollställen (via pq-formeln) $x = -1 \pm 2i$, så ekvationen har lösningar $x = -2, -3, -1 \pm 2i$.

9. Visa med induktion identiteten

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

för alla $n \geq 1$.

Svar: Sätt $n = 1$ inn i formeln, och vi får att vänster sida (VS) ger $a - b$. Höger sida (HS) ger också $a - b$, så steg 1 är ok.

Steg 2: Vi gör induktions-hypotesen (IH)

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Anta att $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} (VS) &= a^{k+1} - b^{k+1} = aa^k - bb^k = a(a^k - b^k) + ab^k - bb^k = \\ &= a(a^k - b^k) + ab^k - bb^k = a(a^k - b^k) + (a - b)b^k = (IH) = \\ &= a(a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}) + (a - b)b^k = \\ &= (a - b)(a^k + a^{k-1}b + \cdots + a^2b^{k-2} + ab^{k-1} + b^k) = (HS). \end{aligned}$$

Vi ser att steg 2 är ok, och identiteten är visad.

10. Lös ekvationen $|x^2 - 3x + 2| = \frac{1}{4}$.

Svar: Vi delar upp ekvationen i 2 ekvationer: på intervallet $(1, 2)$ får vi ekvationen

$$-x^2 + 3x - 2 = \frac{1}{4},$$

som har lösningen $x = \frac{3}{2}$.

På $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ får vi ekvationen

$$x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{4}$$

som har lösning $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{2})$, så svaret är $x = \frac{3}{2}$ och $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{2})$.

11. Lös ekvationen $3^{2x} - 5(3^x) - 6 = 0$.

Svar: Faktorisering ger

$$3^{2x} - 5(3^x) - 6 = (3^x)^2 - 5(3^x) - 6 = (3^x - 6)(3^x + 1) = 0$$

och vi får två ekvationer: $3^x = -1$ och $3^x = 6$. Den första ekvationen saknar lösning, och den andra ekvationen har lösningen $x = \frac{\ln 6}{\ln 3}$.

12. Låt $a_0 = 1$ och $a_1 = 1$. Definiera rekursivt $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ för $n \geq 2$. Visa med induktion formeln

$$a_n = \frac{1}{5}(3^{n+1} + (-1)^n 2^{n+1})$$

för $n \geq 0$.

Svar: Vi ser att $a_0 = \frac{1}{5}(3 + 2) = \frac{5}{5} = 1$ och att $a_1 = \frac{1}{5}(3^2 - 2^2) = 1$ så formeln är ok för $n = 0, 1$. Antag formeln för $n = k$:

$$(IH) : a_k = \frac{1}{5}(3^{k+1} + (-1)^k 2^{k+1}).$$

Sätt $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 6a_{k-1} = (IH) = \frac{1}{5}(3^{k+1} + (-1)^k 2^{k+1}) + 6 \cdot \frac{1}{5}(3^k + (-1)^{k-1} 2^k) = \\ &= \frac{1}{5}(3^{k+1} + (-1)^k 2^{k+1}) + \frac{1}{5}(2(3^{k+1}) - (-1)^k 3(2^{k+1})) = \\ &= \frac{1}{5}(3^{k+2} - (-1)^k 2^{k+2}) = \frac{1}{5}(3^{k+2} + (-1)^{k+1} 2^{k+2}), \end{aligned}$$

och formeln är visad för alla $n \geq 0$.

Lycka till!