

Fasit för tentamen 2004-8-21, kl. 09.00-13.00
5B1121 Baskurs i Matematik, 4p

1. Låt $z = a + ib$ vara et godtyckligt komplext tal. Visa formeln

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Svar: Multiplikasjon ger att

$$(a + ib)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

2. Låt $M_1 = [0, 1]$, $M_2 = (1/2, 3/2)$ och $M_3 = (-2, 0)$. Bestäm $M_1 \cup M_3$, $M_1 \cap M_3$ och $M_1 \cup M_2$.

Svar:

$$\begin{aligned}M_1 \cup M_3 &= (-2, 1), \\M_1 \cap M_3 &= \emptyset\end{aligned}$$

och

$$M_1 \cup M_2 = [0, 3/2).$$

3. Lös ekvationen

$$z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0.$$

Svar: Komplettering av kvadrat ger ekvationen

$$z^2 - (2 + 3i)z + (1/2(2 + 3i))^2 - /1/2(2 + 3i))^2 - 1 + 3i = 0.$$

Vi skriver om och får ekvationen

$$(z - (1/2(2 + 3i)))^2 = -1/4$$

hvilket ger

$$z = 1/2(2 + 3i) \pm 1/2i.$$

Lösningene av den ursprungliga ekvationen är $x = \{1 + i, 1 + 2i\}$.

4. Lös olikheten

$$|x + 3| - |2x + 1| = x.$$

Svar: Et teckenskjema ger at vi får tre forskjellige ekvationer på følgende intervall: $I_1 = (\infty, -3]$, $I_2 = (-3, -1/2]$ og $I_3 = (-1/2, \infty)$. På I_1 får vi ekvationen

$$-(x + 3) - (-(2x + 1)) = x$$

som saknar løsning. På I_2 får vi ekvationen

$$x + 3 - (-(2x + 1)) = x$$

som har løsningen $x = -2$. På I_3 får vi ekvationen

$$x + 3 - (2x + 1) = x$$

som har løsningen $x = 1$. Den ursprungliga ekvationen har løsninger $x = \{-2, 1\}$.

5. Låt L vara linjen genom punktene $P(1, 5)$ och $Q(3, 3)$. Bestäm en ekvation för linjen L och ge också linjen L på parameterform.

Svar: En beskrivelse av L på parameterform fås på följande sätt: Låt $v = \overrightarrow{PQ}$ vara vektorn från P till Q . Vi får

$$v = Q - P = (3, 3) - (1, 5) = (2, -2).$$

En parameterfremstilling för L är då $l(t) = P + tv = (1, 5) + t(2, -2) = (1 + 2t, 5 - 2t)$. Hvilket ger:

$$x(t) = 1 + 2t$$

$$y(t) = 5 - 2t.$$

Vi får en ekvation för L ved att eliminera variabeln t : Addera ekvationene över, hvilket ger

$$x + y = 1 + 2t + 5 - 2t.$$

Vi får ekvationen

$$x + y = 6$$

som är ekivalent med

$$y = 6 - x.$$

6. Lös ekvationen

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0.$$

Svar: Vi ser att ± 2 är lösningar av ekvationen, hvilket ger att $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$ deler polynomet $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$. Polynomdivisjon ger att $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = (x^2 - 4)(x^2 - 2x - 3) = (x^2 - 4)(x + 1)(x - 3)$ hvilket ger att lösningarna av den ursprungliga ekvationen är

$$x = \{\pm 2, -1, 3\}.$$

7. Vis ved induktion likheten

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n = \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1 + x}$$

med $n \geq 1$.

Svar: $n = 1$ ger ekvationen

$$1 - x = \frac{1 + (-1)^1 x^2}{1 + x} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 + x} = 1 - x,$$

i.e ekvationen är sann för $n = 1$. Antag att ekvationen är sann för $n = k$.

Vi får

$$\begin{aligned} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k x^k + (-1)^{k+1} x^{k+1} &= \frac{1 + (-1)^k x^{k+1}}{1 + x} + (-1)^{k+1} x^{k+2} = \\ &= \frac{1 + (-1)^k x^{k+1}}{1 + x} + \frac{(-1)^{k+1} x^{k+1}(1 + x)}{1 + x} = \\ &= \frac{1 + (-1)^{k+1} x^{k+2}}{1 + x} \end{aligned}$$

och ekvationen är visad.

8. Lös olikheten

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 9x - 9} > 0.$$

Svar: polynomdivisjon ger olikheten

$$\frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)(x + 1)} > 0.$$

Et teckenskjema ger att olikheten är uppfylld för

$$x \in (-3, -2) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty).$$

9. Rita kurvan definierad av ekvationen $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 7 = 0$.

Svar: Kvadratkomplettering ger ekvationen

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

som definierar en cirkel med center $C = (2, 3)$ och radie $r = 2$.

10. Lös ekvations-systemet

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + y^2 - 2y &= 2 \\y^2 + x^2 - 2x &= 2 + 2y.\end{aligned}$$

Svar: Kvadratkomplettering ger ekvationene

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-1)^2 &= 4 \\(x-1)^2 + (y-1)^2 &= 4.\end{aligned}$$

Om drar ekvation 2 ifrån ekvation 1 får vi ekvationen

$$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 0,$$

som har lösning $x = 0$. Om vi sätter $x = 0$ inn i tex. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ får vi $y = 1 \pm \sqrt{3}$ hvilket ger lösningar $(x, y) = (0, 1 \pm \sqrt{3})$.

11. Vis formeln

$$(\cos(a) + i\sin(a))^n = \cos(na) + i\sin(na)$$

för alla $n \geq 1$ ved induktion.

Svar: Formeln är ok för $n = 1$. Anta formel ok för $n = k$. Låt $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}(\cos(a) + i\sin(a))^{k+1} &= (\cos(a) + i\sin(a))^k(\cos(a) + i\sin(a)) = \\&= (\cos(ka) + i\sin(ka))(\cos(a) + i\sin(a)) = \\&= \cos(ka)\cos(a) - \sin(ka)\sin(a) + i(\sin(ka)\cos(a) + \cos(ka)\sin(a)) = \\&= \cos(ka + a) + i\sin(ka + a) = \cos((k+1)a) + i\sin((k+1)a)\end{aligned}$$

och formeln följer via induktion.

12. Lös ekvationen

$$z^n = \sqrt{2}(1+i).$$

Svar: Vi använder polär-koordinater och får $\sqrt{2}(1+i) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Sätt $z = re^{i\theta}$. Vi får $z^n = r^n e^{in\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Dette gir:

$$r = 2^{\frac{1}{n}}$$

och

$$n\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Vi får

$$\theta = \frac{\pi}{4n} + \frac{2\pi k}{n}$$

med $k = 0, \dots, n-1$, det vil si

$$z = 2^{\frac{1}{n}} e^{i\theta_k}$$

där $\theta_k = \frac{\pi}{4n} + \frac{2\pi k}{n}$ för $k = 0, \dots, n-1$.