

Tentamensskrivning 2004-8-21, kl. 09.00-13.00
5B1121 Baskurs i Matematik, 4p

Tentamen består av 12 uppgifter a 3 poäng. För godkänt betyg 3 fordras minst 15 poäng. För betyg 4 minst 22 poäng och för betyg 5 minst 29 poäng.

1. Låt $z = a + ib$ vara et godtyckligt komplext tal. Visa formeln

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

2. Låt $M_1 = [0, 1)$, $M_2 = (1/2, 3/2)$ och $M_3 = (-2, 0)$. Bestäm $M_1 \cup M_3$, $M_1 \cap M_3$ och $M_1 \cup M_2$.

3. Lös ekvationen

$$z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0.$$

4. Lös olikheten

$$|x + 3| - |2x + 1| = x.$$

5. Låt L vara linjen genom punktene $P(1, 5)$ och $Q(3, 3)$. Bestäm en ekvation för linjen L och ge också linjen L på parameterform.

6. Lös ekvationen

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0.$$

7. Vis ved induktion likheten

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n = \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1 + x}$$

med $n \geq 1$.

8. Lös olikheten

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 9x - 9} > 0.$$

9. Rita kurvan definierad av ekvationen $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 7 = 0$.

10. Lös ekvations-systemet

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 - 2y &= 2 \\ y^2 + x^2 - 2x &= 2 + 2y. \end{aligned}$$

11. Vis formeln

$$(\cos(a) + i\sin(a))^n = \cos(na) + i\sin(na)$$

för alla $n \geq 1$ ved induktion.

12. Lös ekvationen

$$z^n = \sqrt{2}(1 + i)$$

ved att använda uppgift 11.

Lycka till!