Lösningsförslag till Tentamensskrivning, 2003-06-02, kl. 8.00 -13.00, 5B1123 Matematik 2 för lärare.

Del A.

1. Vektorerna $(1,a,2)$, $(a,1,2)$ och $(0,1,2)$ utgör inte en bas i $\mathbf{R}^3$ om och endast om $0 = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$
$2 + 2a + 0 - 0 - 2 - 2a^2 = 2a - 2a^2 = a(1-a) \Leftrightarrow \ a = 0$ eller $a = 1$. Svar: Alla reella tal utom 0 och 1.

2. Riktningsderivatan i riktningen $\mathbf{v}$ är $D_{\hat{\mathbf{v}}} f(x,y,z) = \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla f(x,y,z)$, där $\hat{\mathbf{v}}$ är enhetsvektorn i punkten (x,y,z) i riktningen $\mathbf{v}$ och $\nabla f(x,y,z)$ är gradienten i punkten (x,y,z).
$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2-z^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2-z^2}, \frac{-2z}{1+x^2+y^2-z^2}\right)$ och gradienten i punkten $(1,-1,1)$ är
$\nabla f(1,-1,1) = \left(\frac{2}{1+1^2+(-1)^2-1^2}, \frac{-2}{1+1^2+(-1)^2-1^2}, \frac{-2}{1+1^2+(-1)^2-1^2}\right) = (1,-1,-1)$. Låt $\mathbf{v}$ vara vektorn som går från punkten (1,-1,1) till punkten (3,-3,4), dvs $\mathbf{v} = (3,-3,4) - (1,-1,1) = (2,-2,3)$. Längden av $\mathbf{v}$ är $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{17}$ och $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(2,-2,3)}{\sqrt{17}}$. $D_{\hat{\mathbf{v}}} f(1,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{17}}(2,-2,3) \cdot (1,-1,-1) =$
$\frac{1}{\sqrt{17}}(2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)) = \frac{1}{\sqrt{17}}(2 + 2 - 3) = \frac{1}{\sqrt{17}}$. Svar: $\frac{1}{\sqrt{17}}$.

3. Green's formel ger $\oint_{\partial D} (x^2 y + \frac{1}{3}y^3 + ye^{xy})\,\mathrm{d}x + (x + xe^{xy})\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbf{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}A$ där $\mathbf{D}$ ges av:
$0 \le y \le 1 - x$ och $0 \le x \le 1$. Vi får $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 + e^{xy} + xe^{xy}y - (x^2 + y^2 + e^{xy} + ye^{xy}x))\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$

$\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[y - x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - x - x^2(1-x) - \frac{1}{3}(1-x)^3)\,\mathrm{d}x =$

$\int_0^1 (1 - x - x^2 + x^3 - \frac{1}{3}(1 - 3x + 3x^2 - x^3))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - x - x^2 + x^3 - \frac{1}{3} + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3)\,\mathrm{d}x =$

$\int_0^1 (\frac{2}{3} - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ Svar: 1/3.

4. $A = (2,2,0)$, $B = (1,1,1)$, $C = (1,3,2)$, $D = (-1,0,1)$ ger $\overline{AB} = (1-2, 1-2, 1-0) = (-1,-1,1)$,
$\overline{AC} = (1-2, 3-2, 2-0) = (-1,1,2)$ och $\overline{AD} = (-1-2, 0-2, 1-0) = (-3,-2.1)$.
Basytans area $b = \frac{1}{2}(\overline{AB} \times \overline{AC})$ och tetraederns volym är $\frac{bh}{3}$, där h är höjden i tetraedern, men också höjden i den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ och $\overline{AD}$, och vars basyta är dubbelt så stor som tetraederns basyta. Parallellepipeden har volymen $2bh = (\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} =$

$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 6 + 2 - (-3) - (4) - 1 = 5 \Rightarrow \ bh = \frac{5}{2} \Rightarrow \ \frac{bh}{3} = \frac{5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$. Svar: 5/6 volymsenheter.

5. Sätt $a_n = \frac{(-1)^n n\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$. För att undersöka om serien är absolut konvergent kontrollerar vi om $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ är konvergent. $|a_n| = \frac{n\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \le \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Låt $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ och jämför $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ med $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ som är divergent, ty $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ är divergent om $0 < p \le 1$. $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{n\sqrt{n}}{n^2}} = 1$. Eftersom gränsvärdet är större än noll är $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ divergent enligt jämförelsekriteriet och serien är inte absolut konvergent. Vi använder Leibniz' kriterium för att bestämma om serien är betingat konvergent.

1) För stora n gäller att $|a_{n+1}| = \frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{(n+1)^2+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\frac{1}{n+1}} \approx \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{n}} =$ $\frac{n\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} = |a_n|$. Alltså är $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ en så småningom avtagande följd.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ är en alternerande serie.

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{n}} = 0$.

1), 2) och 3) ger enligt Leibniz kriterium att serien är konvergent, så serien är betingat konvergent.
<u>Svar:</u> Betingat konvergent.

6. Vid övergång till polära koordinater transformeras området $\boldsymbol{D}$ till området som ges av $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$ och $dxdy$ transformeras till $r\,dr\,d\theta$. Vi får $\iint_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{r\,dr\,d\theta}{1+r^2} =$

$\begin{bmatrix} 1+r^2 = t \Rightarrow 2r\,dr = dt \\ r=0 \Rightarrow t=1,\ r=1 \Rightarrow t=2 \end{bmatrix} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 \frac{dt}{2t} = [\theta]_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}\ln t\right]_1^2 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi\ln 2}{4}$. <u>Svar:</u> $\frac{\pi\ln 2}{4}$.

7. Funktionens har ett största och ett minsta värde i området eftersom det är slutet och begränsat. Ett största eller minsta värde kan endast förekomma i en kritisk punkt, singulär punkt eller randpunkt. Punkten (x,y) är en kritisk punkt om och endast om gradienten $\nabla f(x,y) = (0,0)$. $\nabla f(x,y) = (2y,2x)$ $\Rightarrow$ $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, som är enda kritiska punkten. Eftersom de partiella derivatorna existerar överallt finns inga singulära punkter. En parameterform för randkurvan är $x = \sqrt{3}\cos t$, $y = \sqrt{3}\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Vi bildar funktionen $g(t) = f(\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t) = 2\cdot\sqrt{3}\cos t\cdot\sqrt{3}\sin t =$ $3\sin 2t$. Största och minsta värdet för *g(t)* kan förekomma i en kritisk punkt, singulär punkt eller randpunkt. $g(t)$ har en kritisk punkt om och endast om $g'(t) = 6\cos 2t = 0$ dvs om och endast om $\cos 2t = 0 \Leftrightarrow 2t = \pi/2 + n\cdot 2\pi$ eller $2t = -\pi/2 + n\cdot 2\pi \Leftrightarrow t = \pi/4 + n\pi$ eller $t = -\pi/4 + n\pi \Rightarrow$ $t = \pi/4, 5\pi/4, -\pi/4, 3\pi/4$. Detta ger punkterna $(\sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2), (-\sqrt{6}/2, -\sqrt{6}/2), (\sqrt{6}/2, -\sqrt{6}/2)$,

$(-\sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2)$. Singulära punkter saknas. Randpunkterna $t=0$ och $t=2\pi$ ger punkten $(\sqrt{3},0)$.

Möjliga punkter är $(0,0), (\sqrt{3},0), (\sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2), (-\sqrt{6}/2, -\sqrt{6}/2), (\sqrt{6}/2, -\sqrt{6}/2), (-\sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2)$ och motsvarande funktionsvärden är 0, 0, 3, 3, -3 och -3. <u>Svar:</u> Största värdet är 3 och minsta är -3.

<u>Del B</u>

8. a. T är en en-entydig avbildning om och endast om $\det\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$ inte är 0. $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&-1\end{vmatrix} = -1$

Alltså finns det exakt en vektor som avbildas på **u.** <u>Svar:</u> Exakt en vektor.

b. $T(1,1,1) = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\\1\\1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. <u>Svar:</u> (2,1,0).

c. Vektorn **v** avbildas på (1,1,1) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&-1&1\end{array}\right)$ rad 3 $-$ rad 2 $\Leftrightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&-1&0\end{array}\right)$ rad 1 + rad 3, $-1\cdot$ rad 3 $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right) \Leftrightarrow$ $\mathbf{v} = (1,1,0)$. <u>Svar:</u> (1,1,0).

9. Sätt $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n10^n}(x-2)^n$. Kvottestet ger $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^{n+1}}(x-2)^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n10^n}(x-2)^n}\right| =$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n10^n(x-2)^{n+1}}{(n+1)10^{n+1}(x-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(x-2)}{(n+1)10}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)10}\,|x-2| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})10}\,|x-2| =$

$\dfrac{1}{10}|x-2|$. Serien är absolut konvergent om $\dfrac{1}{10}|x-2| < 1$ och divergent om $\dfrac{1}{10}|x-2| > 1$.

$\dfrac{1}{10}|x-2| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 10 \Leftrightarrow -10 < x-2 < 10 \Leftrightarrow -10+2 < x < 10+2 \Leftrightarrow -8 < x < 12$. Serien är divergent om $x < -8$ eller $x > 12$. Konvergensen måste undersökas för $x = -8$ och $x = 12$.

$x = -8$ ger $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n10^n}(-8-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n10^n}(-10)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n10^n}(-1)^n10^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}$, som är divergent, ty $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}$ är divergent om $0 < p \le 1$. $x = 12$ ger $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n10^n}(12-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n10^n}(10)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

$\dfrac{1}{n}$ är en avtagande följd, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ är en alternerande serie och $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Enligt Leibniz' kriterium är serien konvergent och eftersom $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ är divergent är serien betingat konvergent för $x = 12$.

<u>Svar:</u> Absolut konvergent för $-8 < x < 12$ och betingat konvergent om $x = 12$.

10. Låt $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, dvs kolonn k i $\boldsymbol{C}$ är en egenvektor till det egenvärde som är element $(\mathbf{D})_{kk}$. Då är $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}$ och $\mathbf{A}^{10} = \mathbf{C}\mathbf{D}^{10}\mathbf{C}^{-1}$.

$\mathbf{C}^{-1}$ får genom Gauss-elimination av matrisekvationen $\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{E}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{rad 3} - \text{rad 1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) 1/2 \cdot \text{rad 3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \text{rad 1} + \text{rad 3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \text{rad 2 och 3 byter plats} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{10} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{10} \\ 0 & 2^{10} & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & -2^{10} \\ 0 & 2 \cdot 4^{10} & 0 \\ -2^{10} & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{9} & 0 & -2^{9} \\ 0 & 4^{10} & 0 \\ -2^{9} & 0 & 2^{9} \end{pmatrix}.$$

<u>Svar:</u> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}^{10} = \begin{pmatrix} 2^{9} & 0 & -2^{9} \\ 0 & 4^{10} & 0 \\ -2^{9} & 0 & 2^{9} \end{pmatrix}$.

11. Längden av kurvan är $s = \int |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$. Derivering av $\mathbf{r}(t)$ ger $\mathbf{r}'(t) = (t,\ \frac{1}{t},\ \sqrt{2}),\ 1 \le t \le 2$.

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2} + 2} = \sqrt{t^2 + 2t \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{(t + \frac{1}{t})^2} = \left|t + \frac{1}{t}\right| \text{ ger } s = \int_1^2 \left|t + \frac{1}{t}\right| \mathrm{d}t = \int_1^2 (t + \frac{1}{t})\,\mathrm{d}t =$$

$$\left[\frac{t^2}{2} + \ln t\right]_1^2 = 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{3}{2} + \ln 2.$$

<u>Svar:</u> $\frac{3}{2} + \ln 2$.

12. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = e^{x+y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^{x-y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -e^{x-y}$. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx}$. Kedjeregeln ger $z'_y = z'_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + z'_v \dfrac{\partial v}{\partial y} =$

$z'_u e^{x+y} + z'_v(-e^{x-y})$ och $z''_{yx} = (z''_{uu}\dfrac{\partial u}{\partial x} + z''_{uv}\dfrac{\partial v}{\partial x})e^{x+y} + z'_u e^{x+y} - (z''_{vu}\dfrac{\partial u}{\partial x} + z''_{vv}\dfrac{\partial v}{\partial x})e^{x-y} - z'_v e^{x-y} =$

$(z''_{uu}e^{x+y} + z''_{uv}e^{x-y})e^{x+y} + z'_u e^{x+y} - (z''_{vu}e^{x+y} + z''_{vv}e^{x-y})e^{x-y} - z'_v e^{x-y} = z''_{uu}e^{2(x+y)} + z''_{uv}e^{2x} + z'_u e^{x+y} - z''_{vu}e^{2x}$

$-z''_{vv}e^{2(x-y)} - z'_v e^{x-y} = z''_{uu}u^2 + z'_u u - z''_{vv}v^2 - z'_v v$. Svar: $z''_{uu}u^2 + z'_u u - z''_{vv}v^2 - z'_v v$.

13. Sätt $F = x^2 + xy + z$ och $G = z + 2x^2 - 2y^2 = 0$. Då blir Jakobideterminanten $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} =$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -4y & 1 \end{vmatrix} = x + 4y \Rightarrow \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(2,1,-6)} = 2 + 4 = 6$$ som alltså är skilt från 0. Enligt

implicita funktionssatsen finns det unika funktioner $y = y(x)$ och $z = z(x)$ sådana att $F(x,y(x),z(x)) = 0$ och $G(x,y(x),z(x)) = 0$ i en omgivning av punkten (2,1,-6). Detta ger att skärningskurvan kan skrivas på parameterform: $\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x))$.

Implicit derivering av de givna ekvationerna med avseende på x ger: $\begin{cases} 2x + y + xy' + z' = 0 \\ z' + 4x - 4yy' = 0 \end{cases}$.

$(x,y,z) = (2,1,-6)$ ger $\begin{cases} 4 + 1 + 2y' + z' = 0 \\ z' + 8 - 4y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -5 \\ -4 & 1 & -8 \end{array}\right) \text{rad } 2 + 2\cdot\text{rad } 1 \Leftrightarrow$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -18 \end{array}\right) \frac{1}{3}\cdot\text{rad } 2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \text{rad} 1 - \text{rad} 2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} y' = 1/2 \\ z' = -6 \end{array}$

och $\mathbf{r}'(2) = (1, y'(2), z'(2)) = (1, 1/2, -6)$. Svar: $\mathbf{r}'(2) = (1, 1/2, -6)$.

14. Byte till sfäriska koordinater transformerar området $\mathbf{D}$ till området $\boldsymbol{S}$ som ges av $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ och volymselementet dV transformeras till $\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$. Detta ger

$$\iiint_{\mathbf{D}} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} e^{-k(x^2+y^2+z^2)}\, dV = \iiint_{\mathbf{S}} (\rho^2)^{1/2} e^{-k\rho^2} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \rho^3 e^{-k\rho^2} \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \begin{bmatrix} \rho^2 = t \Rightarrow 2\rho\, d\rho = dt \\ \rho = 0 \Rightarrow t = 0,\ \rho \to \infty \Rightarrow t \to \infty \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{2} t e^{-kt}\, dt = \text{[Partiell integration]}$$

$$= [\varphi]_0^{2\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi}\left(\lim_{R\to\infty}\left[t\frac{e^{-kt}}{-2k}\right]_0^R - \int_0^R \frac{e^{-kt}}{-2k}\, dt\right) = 4\pi\left(\lim_{R\to\infty}\left(R\cdot\frac{e^{-kR}}{-2k} - \left[\frac{e^{-kt}}{2k^2}\right]_0^R\right)\right) =$$

$$4\pi\left(\lim_{R\to\infty}\left(\frac{R}{-2ke^{kR}} - \frac{1}{2k^2e^{kR}} + \frac{1}{2k^2}\right)\right) = \frac{4\pi}{2k^2} = \frac{2\pi}{k^2}$$ vilket skulle bevisas.