Lösningsförslag till tentamensskrivning, 2003-08-22, kl. 14.00 -19.00, 5B1123 Matematik 2 för lärare.

Del A.

1. Bestäm ekvationerna för tangentplanet och normallinjen till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(x,y) = (3,2)$ då $f(x,y) = x^2y - 3xy + y^3$.

Vi beräknar gradienten till f i (3,2): $\operatorname{grad} f(x,y) = (2xy - 3y, x^2 - 3x + 3y^2)$ och $\operatorname{grad} f(3,2) = (12 - 6, 9 - 9 + 12) = (6,12)$. Normallinjens riktningsvektor är $\mathbf{v} = (6,12,-1)$ och $z(3,2) = 8$ så normallinjens ekvation och tangentplanets ekvation blir $\mathbf{r}(t) = (3,2,8) + t(6,12,-1)$ respektive $6(x-3) + 12(y-2) - (z-8) = 0 \Leftrightarrow 6x + 12y - z = 34$.

2. Avgör om följande serier är konvergenta.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n^2}{n^4 + n}$

a. Sätt $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$. Kvottestet ger $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$ som är ett tal mindre än 1. Enligt kvotkriteriet är serien konvergent.

b. Sätt $a_n = \dfrac{n^3 + n^2}{n^4 + n}$. Vi använder jämförelsetestet: $a_n = \dfrac{n^3 + n^2}{n^4 + n} \approx \dfrac{n^3}{n^4} = \dfrac{1}{n}$. Låt $b_n = \dfrac{1}{n}$. Då är $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ en divergent serie, ty det är en p-serie med $p = 1$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3+n^2}{n^4+n}}{\frac{1}{n}} =$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n(n^3 + n^2)}{n^4 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + n^3}{n^4 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}} = 1$ som är ett tal större än 0. Enligt jämförelse-kriteriet är $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ också divergent.

3. Beräkna längden av kurvan $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$, $0 \le t \le 1$.

Båglängden är $s = \int_0^1 \mathrm{d}s$ där båglängdselementet $\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t$ om $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} > 0$ för alla t i det inre av intervallet. $x' = e^t(\cos t + \sin t - \sin t + \cos t) = 2e^t \cos t$ och $y' = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t \Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = 4e^{2t}\cos^2 t + 4e^{2t}\sin^2 t = 4e^{2t} \Rightarrow \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 2e^t$, som är > 0 på intervallet. Längden av kurvan är $s = \int_0^1 2e^t\,\mathrm{d}t = 2\left[e^t\right]_0^1 = 2(e-1)$. Svar: $2(e-1)$ l.e.

4. För en linjär avbildning T gäller att $T(1,2) = (3,4)$ och $T(2,3) = (2,1)$. Bestäm avbildningens standardmatris.

$T(1,2)=(3,4)$ och $T(2,3)=(2,1)$. Ansätt standardmatrisen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Vi får $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, vilket ger $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}=$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3-4}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$ som är avbildningens standardmatris.

5. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y)=2x^2+4xy-y^3-y$ och ange deras karaktär.

En lokal extrempunkt kan förekomma i en kritisk punkt, randpunkt eller singulär punkt. Randpunkter finns inte och då partiella derivatorna av första ordningen är $f'_x=4x+4y$ och $f'_y=4x-3y^2-1$ så finns inga singulära punkter, Vi bestämmer kritiska punkter: $f'_x=0 \Leftrightarrow x=-y$ som insättes i $f'_y=0$. Detta ger $-4y-3y^2-1=0 \Leftrightarrow y^2+\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}}=$ $-\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3} \Leftrightarrow y=-1$ eller $y=-\frac{1}{3}$. $y=-1 \Rightarrow x=1$ och $y=-\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{3}$, så funktionens kritiska punkter är (1,-1) och $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$.

Vi beräknar andra ordningens partiella derivator: $f''_{xx}=4, f''_{xy}=4, f''_{yy}=-6y$. Andraderivatatestet ger:

Kritisk punkt	A	B	C	$AC-B^2$	Karaktär
(1,-1)	4	4	6	8	Lokalt minimum
(1/3,-1/3)	4	4	2	-8	Sadelpunkt

Alltså är $f(1,-1)=2-4+1+1=0$ den enda lokala extrempunkten.

6. Beräkna trippelintegralen $\iiint_{\mathbf{K}}\frac{(x+y)(x-y)}{(y+2z)^2}\,dxdydz$ då **K** är området $1\le x+y\le 3$, $1\le x-y\le 2,\ 2\le y+2z\le 4$.

Variabelbytet $u=x+y,\ v=x-y,\ w=y+2z$ ger det transformerade området $1\le u\le 3$, $1\le v\le 2,\ 2\le w\le 4$. $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-2-2=-4 \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=$ $\left|\frac{1}{-4}\right|=\frac{1}{4}$ och då $dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$ får vi $\iiint_{\mathbf{K}}\frac{(x+y)(x-y)}{(y+2z)^2}\,dxdydz=$ $\int_2^4\int_1^2\int_1^3\frac{uv}{w^2}\frac{1}{4}\,dudvdw=\frac{1}{4}\int_2^4\frac{dw}{w^2}\int_1^2 v\,dv\int_1^3 u\,du=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{w}\right]_2^4\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^3=\frac{1}{4}(-\frac{1}{4}-(-\frac{1}{2}))(2-\frac{1}{2})(\frac{9}{2}-\frac{1}{2})=\frac{3}{8}$.

7. En yta definieras genom ekvationen $3xyz - z^3 = 10$. Visa att det finns en omgivning till punkten $(x,y,z) = (1,3,2)$ där ytan kan uppfattas som en graf till en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x,y)$. Bestäm z'_x och z'_y i punkten $(x,y) = (1,3)$.

Låt $f(x,y,z) = 3xyz - z^3 - 10$. Eftersom $f(1,3,2) = 18 - 8 - 10 = 0$ är $(1,3,2)$ en punkt på ytan. Då f har kontinuerliga partiella derivator av första ordningen, $f'_z = 3xy - 3z^2$ och $f'_z(1,3,2) = -3$ som är skilt ifrån 0, finns enligt implicita funktionssatsen exakt en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x,y)$ så att $z(1,3) = 2$ och $f(x,y,z(x,y)) = 0$ i en omgivning av punkten $(1,3,2)$. Implicit derivering med avseende på x respektive y ger: $\begin{matrix} 3yz + 3xyz'_x - 3z^2 z'_x = 0 \\ 3xz + 3xyz'_y - 3z^2 z'_y = 0 \end{matrix}$. Insättning av

$(x,y,z) = (1,3,2)$ ger $\begin{cases} 18 + 9z'_x - 12z'_x = 0 \\ 6 + 9z'_y - 12z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z'_x = 6 \\ z'_y = 2 \end{cases}$.

Del B

8. Humlan A flyger längs linjen $\mathbf{r}(t) = (2,-3,1) + t(2,1,3)$ och humlan B flyger längs linjen $\mathbf{r}(t) = (1,2,3) + t(1,3,1)$, där t är tiden. Temperaturen ges av funktionen $T(x,y,z) = \dfrac{2 + x^2 + xy + 3z^2}{25}$. Vilken av humlorna upplever störst temperaturökning vid tiden $t = 0$.

Temperaturökningen i punkten (x,y,z) då man färdas med hastigheten $\mathbf{v}$ är $\text{grad}T(x,y,z) \cdot \mathbf{v}$.

$\text{grad}T(x,y,z) = \frac{1}{25}(2x + y, x, 6z) \Rightarrow \text{grad}T(2,-3,1) = \frac{1}{25}(1,2,6)$ och $\text{grad}T(1,2,3) = \frac{1}{25}(4,1,18)$.

Temperaturökningen vid tiden $t = 0$ är

för humla A: $\text{grad}T(2,-3,1) \cdot (2,1,3) = \frac{1}{25}(1,2,6) \cdot (2,1,3) = \frac{1}{25}(2 + 2 + 18) = \frac{22}{25}$ och

för humla B: $\text{grad}T(1,2,3) \cdot (1,3,1) = \frac{1}{25}(4,1,18) \cdot (1,3,1) = \frac{1}{25}(4 + 3 + 18) = 1$.

<u>Svar:</u> Humlan B upplever den största temperaturökningen.

9. Bestäm konstanterna a och b så att $z(x,y) = (3bx - 2y)f(ax + 2by)$ satisfierar ekvationen $2z'_x + 3z'_y = 0$ då f är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel.

$2z'_x + 3z'_y = 0 \Leftrightarrow 2(3bf(ax + 2by) + a(3bx - 2y)f'(ax + 2by)) + 3(-2f(ax + 2by) + 2b(3bx - 2y)f'(ax + 2by)) = (6b - 6)f(ax + 2by) + (2a + 6b)(3bx - 2y)f'(ax + 2by) = 0$ för alla deriverbara funktioner f och alla x och y $\Leftrightarrow \begin{cases} 6b - 6 = 0 \\ 2a + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -3 \end{cases}$.

10. Beräkna linjeintegralen $\int_\gamma \dfrac{\cos x \, dx + \cos y \, dy}{1 + \sin x + \sin y}$ längs linjen $y = 3x$ från punkten (0,0) till punkten $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Vi kontrollerar om fältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2) = (\dfrac{\cos x}{1 + \sin x + \sin y}, \dfrac{\cos y}{1 + \sin x + \sin y})$ är konservativt.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-\cos y\,\cos x}{(1+\sin x+\sin y)^2} - \frac{-\cos x\,\cos y}{(1+\sin x+\sin y)^2} = 0$$ dvs fältet är konservativt och linjeintegralen är oberoende av väg. Vi söker en potentialfunktion φ till fältet: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1 = \frac{\cos x}{1+\sin x+\sin y} \Rightarrow$

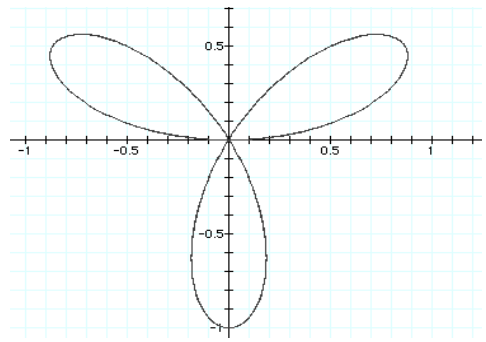
$\varphi = \ln\left|1+\sin x+\sin y\right| + A(y) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos y}{1+\sin x+\sin y} + A'(y) = F_2 = \frac{\cos y}{1+\sin x+\sin y} \Rightarrow A'(y) = 0$

$\Rightarrow A(y) = C$. Alltså en potential till fältet är $\varphi = \ln\left|1+\sin x+\sin y\right|$ och $\int_\gamma \frac{\cos x\,\mathrm{d}x + \cos y\,\mathrm{d}y}{1+\sin x+\sin y} =$

$\varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) - \varphi(0,0) = \ln(1+1-1) - \ln 1 = 0$.

11. Beräkna arean av det område som i polära koordinater definieras av $r = \sin 3v$.

Vi skisserar kurvan.



$r = \sin 3v = 0 \Leftrightarrow 3v = n\pi \Leftrightarrow v = \frac{n\pi}{3}$

$\Leftrightarrow v = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$ eller $\frac{5\pi}{3}$.

$r = \sin 3v = 1 \Leftrightarrow 3v = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftrightarrow$

$v = \frac{\pi}{6} + 2n\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow v = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$ och

$r = \sin 3v = -1 \Leftrightarrow v = -\frac{\pi}{6} + 2n\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$v = \frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ eller $\frac{11\pi}{6}$. Kurvan består av tre öglor så arean $= 3 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} r^2\,\mathrm{d}v =$

$$\frac{3}{2}\int_0^{\pi/3} (\sin 3v)^2\,\mathrm{d}v = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos 6v}{2}\,\mathrm{d}v = \frac{3}{4}\left[v - \frac{\sin 6v}{6}\right]_0^{\pi/3} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$$

<u>Svar:</u> $\frac{\pi}{4}$ a.e.

12. Ett xy-koordinatsystem har basvektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Ett uv-koordinatsystem har basvektorerna $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. En linje i uv-koordinatsystemet har ekvationen $2u + 5v = 3$. Bestäm linjens ekvation i xy-koordinatsystemet.

Vi får transformationsmatrisen $\mathbf{C} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{-2-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{C}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} x+y \\ 3x-2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{5}(x+y) \\ v = \frac{1}{5}(3x-2y) \end{cases}.$$

Vi får $3 = 2u + 5v = \frac{2}{5}(x+y) + \frac{5}{5}(3x-2y) = \frac{17}{5}x - \frac{8}{5}y \Leftrightarrow 17x - 8y = 15$, vilket är linjens ekvation i xy-koordinatsystemet.

13. Visa att $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2} \le \sqrt{6}$ om $x^2+y^2 \le 1$.

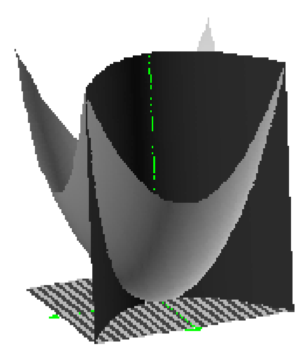
Sätt $f(x,y) = \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2} - \sqrt{6}$ och visa att $f(x,y) \le 0$ då $x^2+y^2 \le 1$. Området är slutet och begränsat så största värdet finns i en kritisk punkt, singulär punkt eller randpunkt.

$f_x' = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_y' = \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \Rightarrow$ singulära punkter finns inte. (x,y) är en kritisk punkt $\Leftrightarrow$ $f_x' = 0$ och $f_y' = 0$ $\Leftrightarrow$ $(x,y) = (0,0)$ som är en punkt i området. På randen är $x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2$ för $-1 \le y \le 1$. Vi bildar funktionen $g(y) = \sqrt{1+1-y^2}+\sqrt{1+y^2} - \sqrt{6} = \sqrt{2-y^2}+\sqrt{1+y^2} - \sqrt{6}$, $-1 \le y \le 1$. Kritiska punkter: $g'(y) = \frac{-y}{\sqrt{2-y^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = 0 \Leftrightarrow$ $-y\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{2-y^2} = 0 \Leftrightarrow y(-\sqrt{1+y^2}+\sqrt{2-y^2}) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ eller $-\sqrt{1+y^2}+\sqrt{2-y^2} = 0$. $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ och $-\sqrt{1+y^2}+\sqrt{2-y^2} = 0 \Rightarrow 1+y^2 = 2-y^2 \Leftrightarrow 2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Prövning ger att båda rötterna satisfierar ekvationen. $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ och vi får punkterna $(1,0)$, $(-1,0)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Ändpunkterna på intervallet ger punkterna $(0,1)$ och $(0,-1)$. Möjliga punkter: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, som ger funktionsvärdena $2-\sqrt{6}$, $1+\sqrt{2}-\sqrt{6}$ respektive 0. $2-\sqrt{6} < 0$ ty $2^2 = 4 < 6$ och $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2} < 6$ ty $(2\sqrt{2})^2 = 8 < (6-3)^2 = 9$. Alltså är $f(x,y) \le 0$ då $x^2+y^2 \le 1$.

14. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av paraboloiden $z = x^2+y^2$, cylindern $y = x^2$ och planen $z = 0$ och $y = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2+y^2 \\ z = 0 \\ y = x^2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \le z \le x^2+y^2 \\ x^2 \le y \le 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{array}\right. \quad \text{(Se figur.)}$$



$$\text{Volymen} = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{x^2+y^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\left[z\right]_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1} \mathrm{d}x =$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3})\mathrm{d}x =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right]_{-1}^{1} =$$

$$2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}) = \frac{88}{105}.$$

Svar: $\frac{88}{105}$ v.e.