Institutionen för matematik
KTH

<u>Tentamensskrivning, 2003-08-22, kl.14.00 -19.00</u>
<u>5B1123 Matematik 2 för lärare</u>.

Om du har 20 eller fler bonuspoäng skall du endast räkna uppgifterna från B-delen.
Om du har färre än 20 bonuspoäng får du räkna uppgifterna från både A- och B-delen. För uppgifterna från A-delen tillgodoräknas dock endast det antal poäng som kompletterar dina bonuspoäng till 20.
Preliminära gränser för betyg 3, 4 och 5 är 20, 36 resp. 44 poäng inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga, tydliga lösningar med motiveringar.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

<u>Del A.</u>

1. Bestäm ekvationerna för tangentplanet och normallinjen till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(x,y) = (3,2)$ då $f(x,y) = x^2 y - 3xy + y^3$. (4 p)

2. Avgör om följande serier är konvergenta.
   a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n^2}{n^4 + n}$ (4 p)

3. Beräkna längden av kurvan $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$, $0 \le t \le 1$. (4 p)

4. För en linjär avbildning $T$ gäller att $T(1,2) = (3,4)$ och $T(2,3) = (2,1)$. Bestäm avbildningens standardmatris. (4 p)

5. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y) = 2x^2 + 4xy - y^3 - y$ och ange deras karaktär. (4 p)

6. Beräkna trippelintegralen $\displaystyle\iiint_{\mathbf{K}} \frac{(x+y)(x-y)}{(y+2z)^2}\,dxdydz$ då **K** ges av $1 \le x + y \le 3$, $1 \le x - y \le 2$, $2 \le y + 2z \le 4$. (4 p)

7. En yta definieras genom ekvationen $3xyz - z^3 = 10$. Visa att det finns en omgivning till punkten $(x,y,z) = (1,3,2)$ där ytan kan uppfattas som en graf till en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x,y)$. Bestäm $z_x'$ och $z_y'$ i punkten $(x,y) = (1,3)$. (4 p)

Del B

8. Humlan A flyger längs linjen $\mathbf{r}(t) = (2,-3,1) + t(2,1,3)$ och humlan B flyger längs linjen $\mathbf{r}(t) = (1,2,3) + t(1,3,1)$, där $t$ är tiden. Temperaturen ges av funktionen $T(x,y,z) = \dfrac{2 + x^2 + xy + 3z^2}{25}$. Vilken av humlorna upplever störst temperaturökning vid tiden $t = 0$. (4 p)

9. Bestäm konstanterna $a$ och $b$ så att $z(x,y) = (3bx - 2y)f(ax + 2by)$ satisfierar ekvationen $2z'_x + 3z'_y = 0$ då $f$ är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel. (4 p)

10. Beräkna linjeintegralen $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos x\,\mathrm{d}x + \cos y\,\mathrm{d}y}{1 + \sin x + \sin y}$ längs linjen $y = 3x$ från punkten (0,0) till punkten $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. (4 p)

11. Beräkna arean av det område som i polära koordinater definieras av $r = \sin 3v$. (4 p)

12. Ett $xy$-koordinatsystem har basvektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Ett $uv$-koordinatsystem har basvektorerna $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. En linje i $uv$-koordinatsystemet har ekvationen $2u + 5v = 3$. Bestäm linjens ekvation i $xy$-koordinatsystemet. (4 p)

13. Visa att $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} \le \sqrt{6}$ om $x^2 + y^2 \le 1$. (4 p)

14. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$, cylindern $y = x^2$ och planen $z = 0$ och $y = 1$. (4 p)