Lösningsförslag till Tentamensskrivning, 2004-01-09, kl. 8.00 -13.00, 5B1123 Matematik 2 för lärare.
Del A.

1. $$\det(\mathbf{M}(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}_{k_4+2k_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}_{k_2+k_1} = \begin{vmatrix} 2 & x+2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$-(x+2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(x+2)(-16-1) = 17(x+2) \geq 0 \iff x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$$

Svar: $x \geq -2$

2. Låt P vara punkten $(1,1,1)$ och Q punkten $(3,1,3)$. $\overline{PQ} = (3,1,3)-(1,1,1) = (2,0,2)$. En parameterform för linjestycket PQ är $(x,y,z) = (1,1,1)+t(2,0,2),\ 0 \leq t \leq 1 \iff x = 1+2t,\ y = 1,\ z = 1+2t \Rightarrow$

$\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y = 0,\ \mathrm{d}z = 2\mathrm{d}t.$ $\int_\gamma 2x\ln z\,\mathrm{d}x + 4y^2z\,\mathrm{d}y + y^3\,\mathrm{d}z = \int_0^1 2(1+2t)\ln(1+2t)2\mathrm{d}t + 0 + 1\cdot 2\mathrm{d}t =$

$\int_0^1 2(1+2t)\ln(1+2t)2\mathrm{d}t + \int_0^1 2\mathrm{d}t = I_1 + I_2.$ $I_2 = \int_0^1 2\mathrm{d}t = \left[2t\right]_0^1 = 2$ och $I_1 = \int_0^1 2(1+2t)\ln(1+2t)2\mathrm{d}t =$

$\left[\begin{matrix} s = 1+2t & \Rightarrow & \mathrm{d}s = 2\mathrm{d}t \\ t = 0 \Rightarrow s = 1 & & t = 1 \Rightarrow s = 3 \end{matrix}\right] = 2\int_1^3 s\ln s\,\mathrm{d}s$. Partiell integration med $\left[\begin{matrix} f = s & g = \ln s \\ F = s^2/2 & g' = 1/s \end{matrix}\right]$ ger

$2\left(\left[\frac{s^2}{2}\ln s\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{s^2}{2}\frac{1}{s}\mathrm{d}s\right) = \left[s^2\ln s\right]_1^3 - \int_1^3 s\,\mathrm{d}s = 9\ln 3 - \ln 1 - \left[\frac{s^2}{2}\right]_1^3 = 9\ln 3 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 9\ln 3 - 4.$ $I_1 + I_2 =$

$9\ln 3 - 4 + 2 = 9\ln 3 - 2$

Svar: $9\ln 3 - 2$

3. $\mathbf{AXB}^{-1} = \mathbf{C} \iff \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AXB}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB} \iff \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}$. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{9-8}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ -8 & 5 & 27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -13 & 1 \\ 26 & 59 & -3 \end{pmatrix}.$

Svar: $\begin{pmatrix} -5 & -13 & 1 \\ 26 & 59 & -3 \end{pmatrix}$

4. Variabelbytet $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ger Jacobimatrisen $\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ som har inversen

$\frac{\mathrm{d}(r,\theta)}{\mathrm{d}(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r\cos^2\theta + r\sin^2\theta}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}$. Alltså $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta,\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta,\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r}\sin\theta$ och $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\theta$. Kedjeregeln

ger $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta$ och $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right)$.

$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = r\cos\theta\left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta\right) - r\sin\theta\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right)\right) =$

$$r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\cos^2\theta\frac{\partial z}{\partial \theta}-r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\sin^2\theta\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial \theta}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\frac{\partial z}{\partial \theta}$$ <u>Svar:</u> $\frac{\partial z}{\partial \theta}$

5. Sätt $a_n=\frac{x^n}{3^n+2^n}$. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}+2^{n+1}}}{\frac{x^n}{3^n+2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(3^n+2^n)}{x^n(3^{n+1}+2^{n+1})}\right|=\lim_{n\to\infty}|x|\frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}$

$$\begin{cases} <1 \iff |x|<\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n 2}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=3 \\ >1 \iff |x|>3 \end{cases}$$

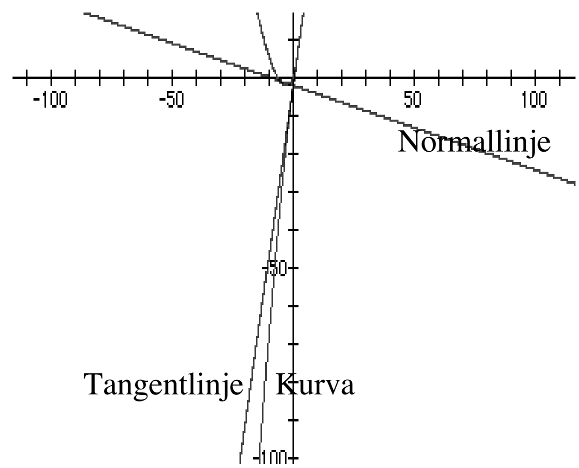
Enligt kvotkriteriet är serien absolut konvergent om $|x|<3$ och divergent om $|x|>3$. Konvergensen undersöks för $x=-3$ och $x=3$.

$x=-3$ ger $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n+2^n}$ $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n3^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ gränsvärdet existerar inte. $x=3$ ger $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+2^n}$ $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1>0$. Enligt sats är serien divergent för $x=-3$ och $x=3$. <u>Svar:</u> Absolut konvergent för $-3<x<3$ och divergent för $x\le -3$ och $x\ge 3$.

6. Vi bestämmer t i punkten (0,-2). $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=3t-t^3\end{cases}$ ger $2t-t^2=0 \iff t=0$ eller $t=2$,

$t=0 \Rightarrow y=0$ och $t=2 \Rightarrow y=-2$. Alltså $t=2$.

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2-2t\\ \frac{dy}{dt}=3-3t^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2}=-2\\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2}=-9\end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-9}{-2}=\frac{9}{2}$$



Tangentens ekvation är $y-(-2)=\frac{9}{2}(x-0) \iff$ $2y+4=9x \iff 9x-2y=4$. Normalens ekvation är $y-(-2)=-\frac{2}{9}(x-0) \iff 9y+18=-2x \iff$ $2x+9y+18=0$

<u>Svar:</u> Tangentens ekvation: $2y+4=9x$. Normalens ekvation: $2x+9y+18=0$.

7. $f(x,y)=2x^2+bxy+y^2+2x+cy$ har en kritisk punkt i $(x,y)=(1,2)$ om $f_x'(1,2)=f_y'(1,2)=0$.

$f_x'=4x+by+2$ och $f_y'=bx+2y+c$. $(x,y)=(1,2) \Rightarrow \begin{cases}4+2b+2=0\\ b+4+c=0\end{cases} \iff \begin{cases}b=-3\\ c=-1\end{cases}$

Andra ordningens partiella derivator är: $f_{xx}''=4, f_{xy}''=-3, f_{yy}''=2$. Vi använder andraderivatatestet för att bestämma den kritiska punktens karaktär.

Kritisk punkt	A	B	C	$AC-B^2$	Karaktär
(1,2)	4	-3	2	-1	Sadelpunkt

Svar: $b=-3,\ c=-1$ och punkten är en sadelpunkt.

Del B

8. $\mathbf{F}=(F_1,F_2,F_3)=(Ax\ln z, By^2z, \frac{x^2}{z}+y^3)$. Fältet är konservativt om $\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=0-0=0$, $\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{2x}{z}-\frac{Ax}{z}=0$ och $\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}=3y^2-By^2=0 \Leftrightarrow A=2$ och $B=3$. Vi söker en potentialfunktion φ till fältet: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}=F_1=2x\ln z \Rightarrow \varphi=x^2\ln z+g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}=g'_y=F_2=3y^2z \Rightarrow$ $g(y,z)=y^3z+h(z) \Rightarrow \varphi=x^2\ln z+y^3z+h(z) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z}=\frac{x^2}{z}+y^3+h'(z)=F_3=\frac{x^2}{z}+y^3 \Rightarrow h'(z)=0$ $\Rightarrow h(z)=C$. En potential till fältet är $\varphi=x^2\ln z+y^3z+C$ för varje konstant C.

Svar: $A=2,\ B=3$ och en potential är $\varphi=x^2\ln z+y^3z+C$, C konstant.

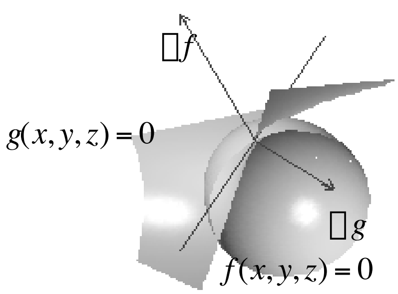
9. Området kan skrivas $y-1\le x\le y,\ 0\le y\le 1$, vilket ger $\iint_D(2x-y)\,dxdy=\int_0^1\int_{y-1}^{y}(2x-y)dxdy=$

$$\int_0^1\left[x^2-xy\right]_{y-1}^{y}dy=\int_0^1(y^2-y^2-(y-1)^2+y(y-1))dy=\int_0^1(-y^2+2y-1+y^2-y)dy=\int_0^1(y-1)dy=$$

$$\left[\frac{1}{2}y^2-y\right]_0^1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

Svar: $-1/2$

10. Sätt $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2$ och $g(x,y,z)=xz-y+1$. I punkten $(1,1,0)$ är ∇f och ∇g vinkelräta mot tangenten. $\nabla f(x,y,z)=(2x,2y,2z)$ och $\nabla g(x,y,z)=(z,-1,x)$ $\Rightarrow \nabla f(1,1,0)=(2,2,0)$ och $\nabla g(1,1,0)=(0,-1,1)$.

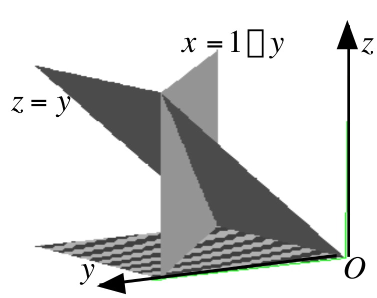


$$\nabla f(1,1,0)\times\nabla g(1,1,0)=(2,2,0)\times(0,-1,1)=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=$$

$\mathbf{e}_x(2-0)-\mathbf{e}_y(2-0)+\mathbf{e}_z(-2-0)=(2,-2,-2)=2(1,-1,-1)$.
$\mathbf{v}=(1,-1,-1)$ är en riktningsvektor till tangenten. Tangentens ekvation är $(x,y,z)=(1,1,0)+t(1,-1,-1),\ t\in\mathbf{R}$

Svar: $(x,y,z)=(1,1,0)+t(1,-1,-1),\ t\in\mathbf{R}$

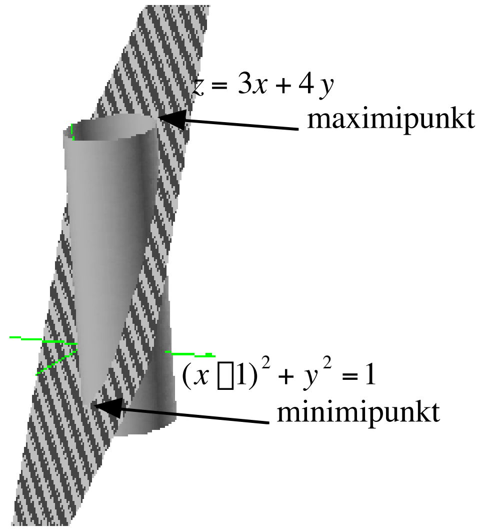
11. $0\le x\le 1-y$ och $0\le z\le y \Rightarrow 0\le 1-y$ och $0\le y \Rightarrow$ $0\le y\le 1$. $\iiint_K(x-3)\,dxdydz=\int_0^1\int_0^y\int_0^{1-y}(x-3)\,dxdzdy=$



$$\int_0^1\int_0^y\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_0^{1-y}dzdy=\int_0^1\int_0^y\left(\frac{(1-y)^2}{2}-3(1-y)\right)dzdy=$$

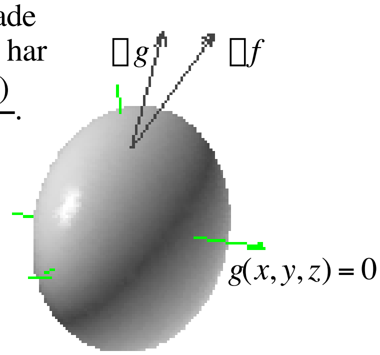
$$\int_0^1\int_0^y\left(\frac{1}{2}-y+\frac{1}{2}y^2-3+3y\right)dzdy=\int_0^1\int_0^y\left(-\frac{5}{2}+2y+\frac{1}{2}y^2\right)dzdy=$$

$\int_0^1 \left[z(-\frac{5}{2}+2y+\frac{1}{2}y^2)\right]_0^y \mathrm{d}y = \int_0^1 y(-\frac{5}{2}+2y+\frac{1}{2}y^2)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (-\frac{5}{2}y+2y^2+\frac{1}{2}y^3)\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{5}{4}y^2+\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{8}y^4\right]_0^1 =$
$-\frac{5}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{8} = \frac{-30+16+3}{24} = -\frac{11}{24}$ <u>Svar:</u> $-\frac{11}{24}$



12. Funktionen har ett största och ett minsta värde i området eftersom det är slutet och begränsat. Ett största eller minsta värde kan endast förekomma i en kritisk punkt, singulär punkt eller randpunkt. Punkten (x,y) är en kritisk punkt om och endast om gradienten $\nabla f(x,y) = (0,0)$. $\nabla f(x,y) = (3,4)$=/=(0,0). Eftersom de partiella derivatorna existerar överallt finns inga singulära punkter. Cirkelns ekvation $x^2 - 2x + y^2 = 0$ får genom kvadratkomplettering formen $(x-1)^2 + y^2 = 1$. En parameterform för kurvan är $x-1 = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Vi bildar funktionen $g(t) = f(\cos t + 1, \sin t) = 3\cos t + 3 + 4\sin t \Rightarrow$ $g'(t) = -3\sin t + 4\cos t$. Största och minsta värdet för *g(t)* kan förekomma i en kritisk punkt, singulär punkt eller randpunkt. $g(t)$ har en kritisk punkt om och endast om $g'(t) = 0 \Leftrightarrow -3\sin t + 4\cos t = 0 \Leftrightarrow$ $\sin t = \frac{4}{3}\cos t$, som sättes in i cirkelns ekvation: $\frac{16}{9}\cos^2 t + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{9}\cos^2 t = 1 \Leftrightarrow$ $\cos^2 t = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$ $\cos t = \frac{3}{5}$ eller $\cos t = -\frac{3}{5}$. $\cos t = \frac{3}{5} \Rightarrow$ $\sin t = \frac{4}{3}\cos t = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$ och $\cos t = -\frac{3}{5} \Rightarrow$ $\sin t = \frac{4}{3}(-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5}$. Kritiska punkter är $(\frac{8}{5},\frac{4}{5})$ och $(\frac{2}{5},-\frac{4}{5})$. Randpunkter för $g(t)$ är $t = 0$ och $t = 2\pi$. Singulära punkter finns inte. Möjliga punkter är $(\frac{8}{5},\frac{4}{5})$, $(\frac{2}{5},-\frac{4}{5})$ och $(2,0)$. Motsvarande funktionsvärden är 8, -2 och 6. <u>Svar:</u> Största värdet är 8 och minsta är -2.

13. Sätt $g(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 12 \Rightarrow \nabla g(x,y,z) = (2x,6y,4z)$. $\nabla g(1,1,2) = (2,6,8) = 2(1,3,4)$. Lär $\mathbf{v} = (1,3,4)$. Då är $\mathbf{v}$ en riktningsvektor till den utåtriktade normalen i punkten. Låt $\hat{\mathbf{v}}$ vara den enhetsvektor som har samma riktning som $\mathbf{v}$. $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1,3,4)}{\sqrt{1+9+16}} = \frac{(1,3,4)}{\sqrt{26}}$.
$\nabla f(x,y,z) = (y^2, 2xy + 2z^2, 4yz) \Rightarrow$
$\nabla f(1,1,2) = (1,10,8)$ och riktningsderivatan är
$f'_{\hat{\mathbf{v}}}(1,1,2) = \hat{\mathbf{v}}\cdot\nabla f(1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{26}}(1,3,4)\cdot(1,10,8) =$
$\frac{1+30+32}{\sqrt{26}} = \frac{63}{\sqrt{26}}$ <u>Svar:</u> $\frac{63}{\sqrt{26}}$



14. Kvadratkomplettering ger: $x^2 + y^2 + z^2 + yz = x^2 + y^2 + 2\cdot y\cdot\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4}z^2 + z^2 =$
$x^2 + (y + \frac{1}{2}z)^2 + \frac{3}{4}z^2 \ge 0$, eftersom en summa av kvadrater aldrig kan vara mindre än 0.