Institutionen för matematik
KTH

<u>Tentamensskrivning, 2004-0109, kl. 8.00 -13.00</u>
<u>5B1123 Matematik 2 för lärare</u>.

Om du har 20 eller fler bonuspoäng skall du endast räkna uppgifterna från B-delen.
Om du har färre än 20 bonuspoäng får du räkna uppgifterna från både A- och B-delen. För uppgifterna från A-delen tillgodoräknas dock endast det antal poäng som kompletterar dina bonuspoäng till 20.
Preliminära gränser för betyg 3, 4 och 5 är 20, 36 resp. 44 poäng inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga, tydliga lösningar med motiveringar.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

<u>Del A.</u>

1. Bestäm alla reella tal x sådana att matrisen $\mathbf{M}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ har determinanten $\det(\mathbf{M}(x)) \geq 0$. (4 p)

2. Beräkna linjeintegralen $\int_\gamma 2x \ln z \, dx + 4y^2 z \, dy + y^3 \, dz$ då γ är linjestycket från punkten $(1,1,1)$ till punkten $(3,1,3)$. (4 p

3. Bestäm den matris $\mathbf{X}$ som uppfyller $\mathbf{AXB}^{-1} = \mathbf{C}$, då $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. (4 p)

4. Transformera differentialekvationen $x \dfrac{\partial z}{\partial y} - y \dfrac{\partial z}{\partial x}$ genom variabelbytet $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.
Svaret får inte innehålla x eller y. (4 p)

5. Bestäm konvergensmängden till serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 2^n}$ ovh avgör för vilka x konvergensen är absolut respektive betingad. (4 p)

6. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ i punkten (0,-2). (4 p)

7. Bestäm konstanterna b och c så att funktionen $f(x,y) = 2x^2 + bxy + y^2 + 2x + cy$ har en kritisk punkt i $(x,y) = (1,2)$. Bestäm den kritiska punktens karaktär. (4 p)

Del B

8. Det finns två konstanter A och B för vilka vektorfältet $\mathbf{F} = (Ax\ln z, By^2 z, \frac{x^2}{z} + y^3)$, $z > 0$ är konservativt. Bestäm för dessa A och B en potentialfunktion till $\mathbf{F}$. (4 p)

9. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (2x - y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ då D begränsas av linjerna $y = x$, $y = x + 1$, $y = 0$ och $y = 1$. (4 p)

10. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ och $y = xz + 1$ i punkten (1,1,0). (4 p)

11. Beräkna trippelintegralen $\iiint_{\mathbf{K}} (x - 3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ då $\mathbf{K}$ definieras av olikheterna $0 \le x \le 1 - y$ och $0 \le z \le y$. (4 p)

12. Bestäm största och minsta värdet värdet som antas av funktionen $f(x,y) = 3x + 4y$ på cirkeln $x^2 - 2x + y^2 = 0$. (4 p)

13. Bestäm riktningsderivatan för $f(x,y,z) = xy^2 + 2yz^2$ i punkten (1,1,2) i den riktning som definieras av den utåtriktade normalen till ellipsoiden $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 12$ i punkten. (4 p)

14. Undersök om det finns en taltrippel (x,y,z) sådan att $x^2 + y^2 + z^2 + yz < 0$. (4 p)