Lösningar till tentamen i kurs 5B1124 Diff&Int I, del 1, LV och 5B1104 Diff&Int I, del 1 den 16 december 2002.

DEL A

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{\sqrt{5x^2+2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(4+\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

2. Implicit derivering map x ger $2x+y+xy'+6y^2y'=0$. Insättning av punkten ger $-4+1-2y'+6y'=0 \Rightarrow y'=\frac{3}{4}$ i punkten. Då är normalens lutningskoefficient -4/3 och dess ekvation är $y-1=-\frac{4}{3}(x+2)$.

2. 3. $y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}=\frac{-x^2+2x+3}{x^4}=0 \Rightarrow x=-1,\,3 \Rightarrow y'=-\frac{(x+1)(x-3)}{x^4}$.

Då är $y'>0$, $1<x<3$ och $y'<0$, $x>3$ Det betyder att funktionen har ett maximum i punkten $x=3$. Då $f(1)=-1$, $f(3)=\frac{5}{27}$ och $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ fås att värdemängden ges av intervallet $\left[-1,\frac{5}{27}\right]$.

4.

$f'(x)=\frac{3}{2}(1+3x)^{-1/2}$, $f''(x)=-\frac{9}{4}(1+3x)^{-3/2}$. $p_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2$.

$f(0)=1$, $f'(0)=\frac{3}{2}$, $f''(0)=-\frac{9}{4} \Rightarrow p_2(x)=1+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2$.

Detta ger $\sqrt{1.3}=f(0.1)\approx p_2(0.1)=1+0.15-0.01125\approx 1.14$.

5.

$$\int \sin x\cos x e^{\sin x}dx=\begin{Bmatrix} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx\end{Bmatrix}=\int ue^u du=ue^u-\int e^u du=ue^u-e^u+C=(\sin x-1)e^{\sin x}+C$$

6.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \begin{Bmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{Bmatrix} = \int_1^\infty \frac{du}{u(u+\frac{1}{u})} = \int_1^\infty \frac{du}{1+u^2} = \lim_{R\to\infty} \left[\arctan u\right]_1^R =$$

$$= \lim_{R\to\infty} (\arctan R - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

7. Parablernas skärningspunkter fås ur $x^2 = 8 - x^2 \Rightarrow x = \pm 2$. Den sökta volymen är då

$$\pi \int_{-2}^{2} \left[(8-x^2)^2 - (x^2)^2\right] dx = 2\pi \int_0^2 (64 - 16x^2)\, dx = 2\pi \left[64x - \frac{16}{3}x^3\right]_0^2 = 2\pi\,(128 - \frac{128}{3}) =$$

$$= \frac{512}{3}\pi \;\; v.e.$$

8. Det homogena problemets karakteristiska ekv är $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$ vilket ger $y_h = A\cos x + B\sin x$. Pga att $\sin x$ även förekommer i ekvationens högerled ansätter vi som partikulärlösning :

$y_p = x(a\cos x + b\sin x) \Rightarrow y_p' = (a + bx)\cos x + (b - ax)\sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow y_p'' = (2b - ax)\cos x - (2a + bx)\sin x$

Insättning i diffekvationen ger $2b\cos x - 2a\sin x = 2\sin x \Rightarrow a = -1,\; b = 0.$ dvs

$y_p = -x\cos x$ vilket ger den allmänna lösningen $y = y_h + y_p = A\cos x + B\sin x - x\cos x$

$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y = B\sin x - x\cos x \Rightarrow y' = B\cos x - \cos x + x\sin x$. Slutligen ger

$y'(0) = 0 \quad B = 1 \Rightarrow y = \sin x - x\cos x.$

DEL B

9. Vi bildar funktionen $f(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{x-1}{x+1}$, $f(1) = 0.$ Vi skall visa att $f(x) > 0$ för $x > 1$. Det är omedelbart klart om vi kan visa att f är växande för $x > 1$:

$f'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{2x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4x}{2x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{2x(x+1)^2} > 0$, $x > 1$. Då är f växande för $x > 1$ VSB!

10. Först bestämmer vi konvergensradien R : $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2n+3} + e^{-(n+1)}}{\dfrac{1}{2n+1} + e^{-n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+(2n+3)e^{-(n+1)}}{1+(2n+1)e^{-n}} \cdot \dfrac{2n+1}{2n+3} = 1\cdot 1 = 1 \Rightarrow R = 1.$ Dvs serien är konvergent för $-1 < x < 1$ och divergent för $x < -1$ och $x > 1$. Det återstår att undersöka fallen $x = 1$ och $x = -1$:

$x = -1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\dfrac{1}{2n+1} + e^{-n})(-1)^n$. Låt $a_n = \dfrac{1}{2n+1} + e^{-n}$. $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ och

$a_{n+1} < a_n$, $n = 0,1,2,3...$: $\dfrac{1}{2n+3} + e^{-(n+1)} < \dfrac{1}{2n+1} + e^{-n}$ ty $\dfrac{1}{2n+3} < \dfrac{1}{2n+1}$ och

$e^{-(n+1)} < e^{-n}$ för $n = 0,1,2,3\ldots$ Enligt Leibniz′ sats om alternerande serier är då serien konvergent för $x = -1$.

$x = 1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\dfrac{1}{2n+1} + e^{-n}) > \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}$. Jämförelse med den divergenta serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ ger:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$. Då är serien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}$ också divergent enligt jämförelse-principen. Då ger majorantprincipen att potensserien är divergent för $x = 1$. Potens-serien är alltså konvergent för $-1 \le x < 1$.

11. $y = \pm \dfrac{\sqrt{x}}{3}(x-3)$ dvs öglan består av två lika långa kurvbågar, en ovanför och en under x – axeln som möts i $x = 0$ och $x = 3$. Längden ges då av $L = 2\int\limits_0^3 \sqrt{1+(y')^2}\, dx$ där

$$y' = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x}\right] = \frac{x-1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow L = 2\int_0^3 \sqrt{1 + \frac{(x-1)^2}{4x}}\, dx = 2\int_0^3 \sqrt{\frac{4x + x^2 - 2x + 1}{4x}}\, dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}}\, dx = \int_0^3 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^3 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\, l.e.$$

12. Låt $I(n)=\int_n^{n+1}\sqrt{x}e^x\,dx$. Det gäller att $\sqrt{n}e^x \le \sqrt{x}e^x \le \sqrt{n+1}\,e^x$ på intervallet $[n,n+1]$

.

Det ger $\sqrt{n}\int_n^{n+1} e^x\,dx \le I(n) \le \sqrt{n+1}\int_n^{n+1} e^x\,dx \Rightarrow \sqrt{n}(e^{n+1}-e^n) \le I(n) \le \sqrt{n+1}(e^{n+1}-e^n)$

dvs $\sqrt{n}e^n(e-1) \le I(n) \le \sqrt{n+1}\,e^n(e-1)$. Division med $\sqrt{n}e^n$ ger

$e-1 \le \dfrac{I(n)}{\sqrt{n}e^n} \le \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}(e-1)$. Då $n\to\infty$ fås med hjälp av inklämningssatsen:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I(n)}{\sqrt{n}e^n}=e-1$ eftersom $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$.