Lösningar till tentamen i kurs 5B1124 Diff&Int I, del 1, LV och 5B1104 Diff&Int I, del 1 den 25 april 2003.

DEL A

1. $f'(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)\cos x$ dvs derivatan är definierad överallt utom i nollställena till $\sin x \Rightarrow x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Högerderivatan i dessa punkter ges av

$$f_+'(n\pi) = \lim_{h\to 0+} \frac{|\sin(n\pi + h)| - |\sin n\pi|}{h} = \{\, h > 0 \Rightarrow |h| = h \} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \left|\frac{\cos n\pi \sin h}{h}\right| = \lim_{h\to 0+}\left|\frac{\sin h}{h}\right| = 1$$

Vänsterderivatan ges av

$$f_-'(n\pi) = \lim_{h\to 0-} \frac{|\sin(n\pi + h)| - |\sin n\pi|}{h} = \{h < 0 \Rightarrow |h| = -h\} = -\lim_{h\to 0-}\left|\frac{\cos n\pi \sin h}{h}\right| =$$

$$= -\lim_{h\to 0-}\left|\frac{\sin h}{h}\right| = -1$$

2. $$f(x) = e^{17\ln x} = x^{17} \Rightarrow f'(x) = 17x^{16} \Rightarrow f''(x) = 17\cdot 16x^{15} \Rightarrow \ldots \Rightarrow f^{(17)}(x) =$$
$$= 17\cdot 16\cdot 15\cdot \ldots \cdot 1 = 17!$$

3. Funktionen är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall. Då antar den ett största och ett minsta värde där. Det sker i en kritisk punkt eller en ändpunkt eftersom singulära punkter saknas. $f'(x) = \sqrt{12-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{12-x}} = \dfrac{2(12-x)-x}{2\sqrt{12-x}} = \dfrac{24-3x}{2\sqrt{12-x}} = 0 \Rightarrow x = 8$ som är den enda kritiska punkten. $f(3) = 9$, $f(8) = 16$, $f(11) = 11$ ger att det största värdet är 16 och det minsta är 9. Funktionen kan alltså inte anta värdet 8 i intervallet.

4. Vi söker Taylorpolynomet av grad 1 kring $x = \pi$: $p_1(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi)$
$f'(x) = \sin x + x\cos x$; $f(\pi) = 0$, $f'(\pi) = -\pi \Rightarrow f(x) \approx p_1(x) = -\pi(x-\pi)$.

5. $$\int xe^{\sqrt{x-1}}dx = \left\{\begin{matrix} u = \sqrt{x-1} \\ dx = 2u\,du \end{matrix}\right\} = 2\int (u^3+u)e^u du = 2(u^3+u)e^u - 2\int (3u^2+1)e^u du =$$

$$= 2(u^3+u)e^u - 2\left[(3u^2+1)e^u - 6\int ue^u du\right] = 2e^u(u^3-3u^2+u-1) + 12(ue^u - \int e^u du) =$$

$$= 2e^u(u^3-3u^2+7u-7) + C = 2e^{\sqrt{x-1}}((x-1)^{3/2} - 3(x-1) + 7\sqrt{x-1} - 7) + C$$ där vi kan välja C =0 tex.

6. Vi delar upp integralen: $I = \int_0^{17} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \int_1^{17} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = I_1 + I_2$

$$I_1 = \lim_{c\to 1-} \int_0^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1-} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^c = 2 - \lim_{c\to 1-} 2\sqrt{1-c} = 2$$

$$I_2 = \lim_{c\to 1+} \int_c^{17} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{c\to 1+} \left[2\sqrt{x-1}\right]_c^{17} = 8 - \lim_{c\to 1+} 2\sqrt{c-1} = 8$$

Då är integralen konvergent med värdet 2+8=10.

7. Den sökta volymen ges av

$$2\pi \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = 2\pi\left(\left[x\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx\right) = 2\pi\left(\frac{\pi}{2} + \left[\cos x\right]_0^{\pi/2}\right) = \pi(\pi-2) \text{ } v.e.$$

8. Konvergensradien R ges av $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)+1}(2n+1) = 1 \Rightarrow R = 1$. Det betyder att serien är konvergent för -1< x <1 och divergent för $|x| > 1$. Vi undersöker ändpunkterna:

$x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ Jämförelse med den divergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ger: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} n = \frac{1}{2}$

dvs vår serie är också divergent enligt jämförelseprincipen.

$x = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ Då $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$ är en mot 0 monotont avtagande talföljd ger Leibniz´ sats om konvergens hos alternerande serier att vår serie är konvergent. Sammantaget gäller alltså att den givna serien är konvergent för $-1 \le x < 1$.

DEL B

9. Det homogena problemets karakteristiska ekvation är $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$. Det ger $y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Som partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ vilket ger $y_p'(x) = 2ax + b$; $y_p''(x) = 2a$. Insättning i differentialekvationen ger $2a + ax^2 + bx + c = x^2 \Rightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = -2$ dvs $y_p(x) = x^2 - 2$. Den allmänna lösningen är då $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x$. $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 2$, $y'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$. Den sökta lösningen är alltså $y(x) = 2\cos x + x^2 - 2$.

10. Avståndet från punkten (x, y) på kurvan till origo är $d = \sqrt{x^2 + y^2} =$

$= \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{(1+4x^2)^2}}$. Vi definierar funktionen $f(x) = d^2$, $x \ge 0$. Vi söker minsta värdet.

$f'(x) = 2x - \dfrac{2 \cdot 8x}{(1+4x^2)^3} = 2x\dfrac{(1+4x^2)^3 - 8}{(1+4x^2)^3} \Rightarrow x = 0$, $1 + 4x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$.

$f(0) = 1$, $f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$ i randpunkten resp den kritiska punkten. Singulära punkter saknas

och $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Den sökta punkten är då $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$.

11. Vi skall visa att $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x - \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{\pi}{2}$. Vi definierar funktionen

$f(x) = \arctan x - \dfrac{1}{1+x^2}$ som är definierad och deriverbar för alla x.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{(1+x)^2}{(1+x^2)^2} \ge 0$ med likhet endast för x =-1 som är en kritisk

punkt (terasspunkt). f är alltså växande. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ eftersom $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0$ och

$-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$ med $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ som halvsidiga asymptoter. Därmed är olikheten

$-\dfrac{\pi}{2} < f(x) < \dfrac{\pi}{2}$ visad.

12. Arean ges av $S = 2\pi\int_0^1 |y|\sqrt{1+y'^2}\,dx$ där $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 = \dfrac{(e^x - 1)^2}{2e^x} \ge 0$ med likhet

endast för x =0 dvs $|y| = y$.

$y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ varav $1 + y'^2 = 1 + \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2}{4}$. Vi får då

$$S = 2\pi\int_0^1 (\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1)(\frac{e^x + e^{-x}}{2})dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left[(e^x + e^{-x})^2 - 2e^x - 2e^{-x}\right]dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 2e^x - 2e^{-x})dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} - 2e^x + 2e^{-x}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}(\frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2} - 2e + 2e^{-1})\ a.e.$$