Lösningar till tentamen i kurs 5B1124 Diff&Int I, del 1, LV och 5B1104 Diff&Int I, del 1 den 21 augusti 2003.

DEL A

1.
$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-(x+h)^2}-\sqrt{1-x^2}}{h} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-(x+h)^2-(1-x^2)}{h(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2})} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x-h}{\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

2. Implicit derivering map x ger $2x + y + xy' + \frac{1+y'}{\sqrt{'x+y}} = 0$. Insättning av punkten ger

$7 + 3y' + \frac{1+y'}{2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{15}{7}$. Det ger tangentlinjens ekvation $y - 1 = -\frac{15}{7}(x-3)$.

2. 3. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+x)} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ som är enda kritiska punkten.

Funktionen är definierad för $x \geq 0$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ ger då endast en ändpunkt $x = 0$.

Singulära punkter saknas för $x > 0$. Då $f'(x) > 0$ för $0 < x < \frac{1}{4}$ och $f'(x) < 0$ för

$x > \frac{1}{4}$ har f ett lokalt minimum för $x = 0$ och ett lokalt maximum för $x = \frac{1}{4}$.

4. Homogena problemets karakteristiska ekv är $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = -1,-1$. Då är den homogena lösningen $y_h = (A + Bx)e^{-x}$. Vi söker en partikulärlösning av formen $y_p = ae^{2x} \Rightarrow y_p' = 2ae^{2x} \Rightarrow y_p'' = 4ae^{2x}$. Insättning i differentialekvationen ger

$(4a + 4a + a)e^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$. Allmän lösning är då $y = (A + Bx)e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$.

$y(0) = A + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(1) = Be^{-1} + \frac{1}{3}e^2 = \frac{1}{3}e^2 \Rightarrow B = 0$. Den sökta lösningen

är alltså $y = \frac{1}{3}e^{2x}$.

5.
$$\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3} = \left\{\begin{array}{l} u = 1+\sqrt{x} \\ du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2(u-1)du = dx \end{array}\right\} = 2\int\frac{u-1}{u^3}du = 2\int(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3})du = 2(-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}) + C$$

Insättning av gränserna $u = 1$ resp 2 i undre respektive övre gränsen ger resultatet 1/4 .

6. Partialbråksuppdelning :

$$\frac{3x^2-x-3}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3} = \frac{(A+B)x^2+(C-2B)x+3A-2C}{(x-2)(x^2+3)}$$. Det ger

$$\begin{cases} A+B \quad = 3 \\ -2B+C=-1 \\ 3A \quad -2C=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}$$ Vi får $\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2x}{x^2+3}dx + \int \frac{3dx}{x^2+3} =$

$= \ln|x-2| + \ln(x^2+3) + I$ där $I = 3\int \frac{dx}{x^2+3} = \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2} = \arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

7. Längden ges av $\int_1^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$. $y' = (x-1)^{1/2} \Rightarrow 1+(y')^2 = x$ och vi får längden

$\int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_1^4 = \frac{14}{3} le$.

8. $0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+\sqrt{n}}{n^3+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n}{n^3+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^3} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som är en konvergent p – serie (p = 2>1).
Enligt majorantprincipen är då den givna serien konvergent.

DEL B

9. $\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} (x^2+6x+10) = 5$, $\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} (-2x^3+3x^2) = 5$. Det betyder att f är kontinuerlig i x = -1 och alltså på hela det slutna intervallet $-4 \le x \le 2$. Då antar f ett största och ett minsta värde på intervallet och alla värden däremellan. Ett extremvärde antas i en kritisk punkt, en singulär punkt eller en randpunkt.
För $-4 \le x \le -1$ fås kritiska punkter ur $2x+6=0 \Rightarrow x=-3$.
För $-1 < x \le 2$ fås kritiska punkter ur $-6x^2+6x=0 \Rightarrow x=0{,}1$.
$\lim_{x\to -1-} f'(x) = \lim_{x\to -1-} (2x+6) = 4$, $\lim_{x\to -1+} f'(x) = \lim_{x\to -1+} (-6x^2+6x) = -12$. Det betyder att f ej är deriverbar i x = -1 som alltså är en singulär punkt. Ändpunkter är x = -4, 2 .
De intressanta punkterna är alltså x = -4, -3, -1, 0, 1, 2 . I dessa punkter antar f värdena 2, 1, 5, 0, 1, -4 . Det ger värdemängden $[-4{,}5]$.

10. Arean = $2\pi\int_0^3 y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, $y' = \frac{1}{3}(-\sqrt{x}+(3-x)\frac{1}{2\sqrt{x}}) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$. Det ger arean =

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^3 (3-x)\sqrt{x}\sqrt{1+(\frac{1-x}{2\sqrt{x}})^2}\,dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^3 (3-x)\sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1+x^2-2x}{4x}}\,dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^3 (3-x)\sqrt{x}\sqrt{(\frac{1+x}{2\sqrt{x}})^2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_0^3 (3-x)(1+x)dx = \frac{\pi}{3}\int_0^3 (3+2x-x^2)\,dx = \frac{\pi}{3}\left[3x+x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3\pi\, ae$$

11a. $f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$, $x > 1$. Då är f växande och alltså inverterbar för $x \geq 1$.

b. $D(f^{-1}) = R(f)$. Vilka värden antar f ? Enligt a. är f växande.

$f(1) = 0 \Rightarrow R(f) = [0,\infty) = D(f^{-1})$

c. Allmänt gäller

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $f(\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2}+1) \Leftrightarrow \sqrt{2} = f^{-1}(\ln(\sqrt{2}+1))$ ger då

$$(f^{-1})'(\ln(\sqrt{2}+1)) = \frac{1}{f'(\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}} = 1 .$$

12a.

$$I_n = \lim_{R\to\infty}\left\{\left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R}\frac{x(-n)2x}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx\right\} = \lim_{R\to\infty}\frac{2R}{(1+R^2)^n} + 2n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx =$$

$$= 0 + 2n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}dx = 2n(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx) = 2n(I_n - I_{n+1})$$

b. Från a. får vi $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n$. Ur detta fås

$$I_2 = \frac{1}{2}I_1 \ , \ I_3 = \frac{3}{4}I_2 \ , \ I_4 = \frac{5}{6}I_3 \ , \ I_5 = \frac{7}{8}I_4 \Rightarrow I_5 = \frac{7\cdot 5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}I_1 .$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}[\arctan x]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} 2\arctan R = \pi \quad \Rightarrow I_5 = \frac{105\pi}{384} = \frac{35\pi}{128} .$$