

Institutionen för matematik, KTH  
Göran Hulth, Henrik Eriksson

**5B1124 Differential- och integralkalkyl I, del 1, LV**  
**5B1104 Differential- och integralkalkyl I, del 1**  
**Tentamen, torsdagen den 21 augusti 2003 kl 0800-1300.**

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är BETA. För betyg 3 krävs minst 15 poäng på A-delen. För betyg 4 eller 5 skall man dessutom uppnå minst 9 resp minst 15 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar givits. En godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. För L och V motsvarar skrivning 1-7 uppgift 1-7 men för D gäller följande tabell.

Skrivning	L1	H1	L2	H2	L3	H3	L4
Uppgift	1	2	3	5	7	8	4

**Del A , uppgifter à 3p**

1. Använd derivatans definition för att beräkna derivatan av funktionen  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .
2. Bestäm ekvationen för den linje som är tangent till kurvan  $x^2 + xy + 2\sqrt{x+y} = 16$  i punkten (3,1).
3. Bestäm de lokala extrempunkterna till funktionen  $f(x) = \arctan \sqrt{x} - \ln(x+1)$  och avgör deras karaktär.
4. Bestäm den lösning till differentialekvationen  $y'' + 2y' + y = 3e^{2x}$  som uppfyller  $y(0) = \frac{1}{3}$ ,  $y(1) = \frac{e^2}{3}$ .
5. Beräkna integralen  $\int_0^1 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}$ .
6. Beräkna en antiderivata till funktionen  $f(x) = \frac{3x^2 - x - 3}{(x-2)(x^2+3)}$ .
7. Beräkna längden av kurvbågen  $3y = 2(x-1)^{3/2}$ ,  $1 \leq x \leq 4$ .
8. Avgör om serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + \sqrt{n}}{n^3 + 1}$  är konvergent eller divergent.

**VÄND!**

**Del B, uppgifter à 5p**

9. Bestäm värdemängden (range) till funktionen  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 10 & , \quad -4 \leq x \leq -1 \\ -2x^3 + 3x^2 & , \quad -1 < x \leq 2 \end{cases}$ .

10. Kurvan  $3y = (3-x)\sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 3$  roterar ett varv kring  $x$ -axeln. Beräkna arean av den erhållna rotationsytan.

11a. Visa att funktionen  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$  är inverterbar för  $x \geq 1$ . (1p)

b. Bestäm definitionsområdet för inversfunktionen  $f^{-1}(x)$ . (2p)

c. Beräkna inversfunktionens derivata i punkten  $\ln(\sqrt{2} + 1)$ . (2p)

12. Betrakta den generaliserade integralen  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

a. Visa att  $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$ . (3p)

b. Beräkna  $I_5$ . (2p)