Lösningar till tentamen i kurs 5B1128 Linjär algebra I, LV för L och V 021016

Del 1

1. $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ a & 1 & -1 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -(a+1) & 1-a\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -(a+3) & -(a+1)\end{bmatrix}$$

I) a = -3 : sista raden blir $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ dvs lösning saknas

II) $a \neq -3$ ger $z = \dfrac{a+1}{a+3} \Rightarrow y = 2 - \dfrac{2(a+1)}{a+3} = \dfrac{4}{a+3} \Rightarrow x = \dfrac{2}{a+3}$

2. $X = BA^{-1}$. Vi söker A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}4 & 12 & -5 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to (-4R_2 + R_1,\ R_1 \leftrightarrow R_3) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 0\end{array}\right] \to$$

$$\to (5R_3 + R_2,\ -R_3 + R_1) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 0 & -1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 5 & -20 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0\end{array}\right] \to (-3R_2 + R_1) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -16 & 65 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 5 & -20 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0\end{array}\right]$$

Det ger $X = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-16 & 65 & -3\\ 5 & -20 & 1\\ -1 & 4 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & -24 & 1\\ -17 & 69 & -3\\ 5 & -20 & 1\end{bmatrix}$

3. Låt P, P_0, P_1 vara punkterna (1,3,-2), (2,0,-1), (3,-1,-1). Vi bildar vektorn $\bar{u} = (-1,3,-1)$ från P_0 till P och projicerar den ortogonalt på vektorn $\bar{v} = (1,-1,0)$ från P_0 till P_1. Det ger

$\bar{w} = \dfrac{(\bar{u} \cdot \bar{v})}{\|\bar{v}\|^2}\bar{v} = \dfrac{-1-3+0}{1^2 + (-1)^2 + 0^2}(1,-1,0) = (-2,2,0)$. Det sökta avståndet ges då av

$\|\bar{u} - \bar{w}\| = \|(1,1,-1)\| = \sqrt{3}\ l.e.$

4. Volymen ges av absolutbeloppet av $\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -4$ dvs volymen är 4 v.e.

ux**v** $= \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = (1,-3,1).$

Volymen av den låda som bestäms av **u**, **u**x**v** och **w** ges av absolutbeloppet av

$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & -3 & -1\\ 0 & -5 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 0\end{vmatrix} = -5$. Då volymen ej blev 0 ligger de tre vektorerna inte i samma plan.

5. Låt $w = 1 - i\sqrt{3}$. $|w| = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. $w = 2(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\theta = 1 \\ 2\sin\theta = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{-\pi}{3}$.

Vi får $w^{69} = 2^{69}(\cos(-\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{3}))^{69} = \{de\,Moivre\} = 2^{69}(\cos 23\pi - i\sin 23\pi) = -2^{69}$

dvs talet är reellt.

6. Enklast är att först uttrycka (1,-3) som en linjärkombination av (3,1) och (4,-2):

$C_1(3,1) + C_2(4,-2) = (1,-3) \Rightarrow \begin{cases} 3C_1 + 4C_2 = 1 \\ C_1 - 2C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -1,\ C_2 = 1$. Sedan används

linjäriteten: $T(1,-3) = -T(3,1) + T(4,-2) = (1,-6,-14) + (12,8,2) = (13,2,-12)$.

Man kan också ansätta en 3x2 matris och använda de givna villkoren.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ egenvektor med egenvärdet 1.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 24 \\ 30 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$ egenvektor med egenvärde 6.

På samma sätt visas att $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ är en egenvektor med egenvärde -4.

8. Vi löser systemet

$\begin{cases} 5x - 2y + 6z = 0 \\ -2x + y + 3z = 1 \end{cases}$: $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to (2R_2 + R_1) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 12 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & 27 & 5 \end{bmatrix}$ $z = t \Rightarrow y = 5 - 27t \Rightarrow x = 2 - 12t$

dvs skärningslinjens parameterekv är $\begin{cases} x = 2 - 12t \\ y = 5 - 27t \\ z = t \end{cases}$. yz – planet ges av $x = 0$.

Det ger $t = \dfrac{1}{6}$ och den sökta punkten är $(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6})$.

Del 2

9. Den sökta matrisen $[T]=[T_3][T_2][T_1]$ där $[T_i]$, $i=1,2,3$ ges av att dess kolumner är $T_i(1,0)$ och $T_i(0,1)$.

$T_1(1,0)=(1,0)$, $T_1(0,1)=(0,0) \Rightarrow [T_1]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$T_2(1,0)=(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $T_2(0,1)=(-\sin\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{3})=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}) \Rightarrow [T_2]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$

$T_3(1,0)=(0,1)$, $T_3(0,1)=(1,0) \Rightarrow [T_3]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow$

$[T]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

Linjen $x=2$ ges av $\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}$. $[T]\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}$. Bilden av linjen $x=2$ är alltså punkten $(\sqrt{3},1)$.

10. Skärningspunkten mellan den givna linjen och planet fås: $(-3+2t)+2(-3+t)-(-1-t)=2$. Ur detta fås $t=2$. Det ger skärningspunkten (1,-1,-3). Den sökta linjen är ortogonal mot den givna linjens riktningsvektor (2,1,-1) och mot planets normalvektor (1,2,-1). Som riktningsvektor för den sökta linjen kan vi då välja vektorn $(2,1,-1)\times(1,2,-1)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(1,1,3).$

Den sökta linjen ges då av $(x,y,z)=(1,-1,-3)+t(1,1,3)$.

11. Vi söker egenvärden och egenvektorer. Karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 1-\lambda & -2\\ -1 & 0 & -(2+\lambda)\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & -(\lambda+2)\end{vmatrix}+(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ -1 & -(\lambda+2)\end{vmatrix}=$$

$=2(\lambda+2)+2+(1-\lambda)[(\lambda+2)(\lambda-2)+1]=-(\lambda^3-\lambda^2-5\lambda-3)=0.$

En rot är $\lambda=-1$. Polynomdivision med $\lambda+1$ ger då att polynomet kan faktoruppdelas som $(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-3)$. Andragradsfaktorn har nollställena -1 och 3 dvs egenvärdena är -1,-1,3. Om matrisen är diagonaliserbar måste egenrummet som hör till det dubbla egenvärdet ha dimension 2. Vi söker dessa egenvektorer:

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

En fri kolumn gör att vi får endast en parameter i lösningen dvs egenrummet får dimension 1 och matrisen är ej diagonaliserbar.

12a. $(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$ dvs AB är symmetrisk.

b. Enligt a. kan den givna ekvationen skrivas : $2A^2+2AB-2I=O \Rightarrow A^2+AB=I$. Detta ger i sin tur $A(A+B)=I$ men det betyder att A är inverterbar med inversen $A+B$.