Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i kurs 5B1128 Linjär algebra I, LV för L och V.
Onsdagen den 16 oktober 2002 kl 0800-1300.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 8 uppgifter à 3 poäng. Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på lappskrivning n (n=1,2,3,…7) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas. För att uppnå betyg 3 krävs minst 15 poäng.
Del 2 är avsedd för betyg 4 och 5 och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng. Betygsgränser för dessa betyg är 9 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betyg 3 uppnåtts på del 1.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. Lös, för alla reella värden på konstanten a, ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ ax + y - z = 1 \end{cases}$$

2. Lös matrisekvationen $XA=B$ där
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Bestäm det kortaste avståndet från punkten (1,3,-2) till den linje som går genom punkterna (2,0,-1) och (3,-1,-1).

4. En låda har formen av en sned parallellepiped med kanterna representerade av vektorerna $\mathbf{u} = (2,1,1)$, $\mathbf{v} = (1,1,2)$ och $\mathbf{w} = (1,2,1)$. Beräkna lådans volym samt avgör om vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ ligger i samma plan.

5. Visa att det komplexa talet $(1 - i\sqrt{3})^{69}$ ligger på den reella axeln.

6. För den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gäller $T(3,1)=(-1,6,14)$ och $T(4,-2)=(12,8,2)$. Bestäm $T(1,-3)$.

7. Visa att $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ är egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ samt bestäm motsvarande egenvärden.

VGV

8. Bestäm den punkt där skärningslinjen mellan planen $5x-2y+6z=0$ och $-2x+y+3z=1$ skär yz-planet.

Del 2

9. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ som sammansätts av en ortogonal projektion på x-axeln följd av en rotation moturs $\frac{\pi}{3}$ radianer följd av en spegling i linjen $y=x$. Vad är bilden av linjen $x=2$?

10. Bestäm den räta linje i planet $x+2y-z=2$ som skär linjen $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-3+t \\ z=-1-t \end{cases}$ under rät vinkel.

11. Avgör om matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar.

12. De symmetriska matriserna A och B uppfyller ekvationen $AB=BA$.
 a. Visa att AB är symmetrisk (2p)
 b. Antag att A och B ovan även uppfyller ekvationen $2A^2+AB+(AB)^T-2I=O$. där O är nollmatrisen. Visa att A är inverterbar och bestäm dess invers. (3p)