Lösningar till tentamen i kurs 5B1128 Linjär algebra I, LV för L och V 030107

1. $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & -2 & 4 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & a+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

dvs för $a \neq 0$ saknas lösning. För $a = 0$ fås:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_3 = s,\ x_4 = t \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{3} - 2s \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \qquad - t \\ x_3 = \quad s \\ x_4 = \qquad t \end{cases}$$

2. $$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (AA^T)^{-1} = \frac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. De tre villkoren ger $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2}$, $(a,b,c) \cdot (0,1,1) = 0$ och

$(a,b,c) \cdot (1,1,0) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cos\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 1$. Detta ger

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 & (1) \\ \quad b + \ c \ = 0 & (2) \\ a \ + b \qquad = 1 & (3) \end{cases} \Rightarrow c = -b\ ,\ a = 1 - b .$$ Insättning i (1) ger nu ekvationen

$(1-b)^2 + b^2 + (-b)^2 = 2 \Rightarrow 3b^2 - 2b + 1 = 2 \Rightarrow b^2 - \dfrac{2}{3}b - \dfrac{1}{3} = 0 \Rightarrow b = 1\ ,\ -\dfrac{1}{3}$ Det ger vektorerna (0,1,-1) och (4/3, -1/3, 1/3).

4. Låt punkterna vara P, Q och R. Vi bildar kantvektorerna $\bar{u} = (1,2,-1)$ från P till Q och $\bar{v} = (-1,-2,-1)$ från P till R. Arean ges då av $\dfrac{1}{2}\|\bar{u} \times \bar{v}\|$.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-4,2,0)$$ dvs arean är $\dfrac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ *ae* .

5. $z^3 = \pm 8i$. Eftersom $(-z)^3 = -8i \Leftrightarrow z^3 = 8i$ räcker det att lösa den senare ekvationen. Lösningarna till $z^3 = -8i$ fås då genom teckenbyte hos lösningarna till $z^3 = 8i$.

$8i = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow r = 8,\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z_n = \sqrt[3]{8}e^{\frac{i}{3}(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}$, $n = 0,1,2.$

$$z_0 = 2e^{i\pi/6} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i$$

Det ger rötterna $z_1 = 2e^{i5\pi/6} = 2(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i$

$$z_2 = 2e^{i3\pi/2} = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i$$

De övriga tre ges alltså av $-(\sqrt{3} + i)$, $\sqrt{3} - i$, $2i$.

6. Standardmatrisen är $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. $\det A = 4 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow T^{-1}$ existerar. Dess standardmatris ges av $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Det ger $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. dvs $T^{-1}(2,5) = (3,-1)$.

7. Karakteristiska ekv:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda\left[\lambda(1-\lambda) + 1 - \lambda\right] - \left[1 - \lambda + 1 - \lambda\right] =$$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = -2, 1, 1$. Egenvektorerna fås:

$$\lambda = -2: \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \quad \text{Det ger } \bar{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Planens normalvektorer är $\bar{n}_1 = (1,-2,1)$, $\bar{n}_2 = (2,2,-3)$. Linjens riktningsvektor

$$\bar{v} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (4,5,6). \text{ Linjens parameterekv är då } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \end{cases}.$$

Del 2

9. Division med $z-i$ ger faktorn $z^2+(1-2i)z+1+5i$. Att resten blir 0 visar att $z=i$ är en rot. De övriga två rötterna är då rötter till ekvationen $z^2+(1-2i)z+1+5i=0$. Kvadratkomplettering ger $(z+\frac{1-2i}{2})^2-\frac{(1-2i)^2}{4}+1+5i=0$.

   Ur detta fås $(z+\frac{1-2i}{2})^2=-\frac{7}{4}-6i$ vilket med $z+\frac{1-2i}{2}=w=x+iy$ (1) ger systemet

$$\begin{cases} x^2-y^2=-\frac{7}{4} & (2) \\ 2xy \quad =-6 & (3) \\ x^2+y^2=\frac{25}{4} & (4) \end{cases}$$

Ekv (4) fås ur $x^2+y^2=|w|^2=\left|-\frac{7}{4}-6i\right|=\sqrt{\frac{49}{16}+36}=\sqrt{\frac{625}{16}}=\frac{25}{4}$.

(2)+(4) ger $2x^2=\frac{18}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{3}{2}$ och (4)-(2) ger $2y^2=\frac{32}{4}\Rightarrow y=\pm 2$. (3) ger att x och y har olika tecken. Ur (1) fås då

$$\begin{cases} z_2=\frac{3}{2}-2i-\frac{1-2i}{2}=1-i \\ z_3=-\frac{3}{2}+2i-\frac{1-2i}{2}=-2+3i \end{cases}$$

10. Om linjerna skär varandra har följande system entydig lösning:

$$\begin{cases} 3+4t=-1+4s \\ 4+\ t=\ 7+2s \\ 1 \qquad = 5+\ s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s-t=\ 1 \\ 2s-t=-3 \\ s \qquad =-4 \end{cases} \Rightarrow s=-4,\ t=-5$$

. Dvs linjerna skär varandra i punkten Q (-17,-1,1). Låt P vara den punkt på L_2 som ligger närmast R (15,7,1).
Vi söker $\|\bar{v}\|$ där $\bar{v}$ är vektorn från Q till P. Låt $\bar{w}$ vara vektorn från Q till R och $\bar{u}=(4,2,1)$ dvs L_2 :s riktningsvektor. Då är $\bar{v}=proj_{\bar{u}}\bar{w}$. Med $\bar{w}=(32,8,0)$

fås $\|\bar{v}\|=\left\|\frac{[(32,8,0)\cdot(4,2,1)](4,2,1)}{\|(4,2,1)\|^2}\right\|=\frac{144}{\|(4,2,1)\|}=\frac{144}{\sqrt{21}}$ *le.*

11. Med $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ kan vi skriva ekvationen som $\bar{x}^T A\bar{x} = 4$ där $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. Vi diago-

naliserar A : $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 4{,}6$.

a. Kägelsnittet är alltså en ellips.
b. Vi söker egenvektorerna:

$\lambda = 4: \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 6: \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Låt $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det P = +1$

och transformationen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ är en rotation. Den kvadratiska ekvationen blir då, i

de nya variablerna: $6x'^2 + 4y'^2 = 4 \;\Rightarrow\; \dfrac{x'^2}{(\sqrt{\frac{2}{3}})^2} + \dfrac{y'^2}{1^2} = 1.$

12a. $A \sim B$ innebär att det finns en inverterbar matris P så att $B = P^{-1}AP$. Då P^{-1}, A och P är inverterbara är B också det : $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$.

b. Vi skall visa att det finns en inverterbar matris P så att $BA = P^{-1}ABP$. A är inverterbar och duger som P eftersom $BA = IBA = A^{-1}A(BA) = A^{-1}(AB)A$ för varje B (som är av rätt storlek).