Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i kurs 5B1128 Linjär algebra I, LV för L och V.
Tisdagen den 7 januari 2003 kl 1400-1900.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 8 uppgifter à 3 poäng. Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på lappskrivning n (n=1,2,3,…7) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas. För att uppnå betyg 3 krävs minst 15 poäng.
Del 2 är avsedd för betyg 4 och 5 och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng. Betygsgränser för dessa betyg är 9 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betyg 3 uppnåtts på del 1.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. Lös, för alla reella värden på konstanten a, ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 = a \end{cases}$$

2. Bestäm inversen till matrisen AA^T där $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Bestäm varje vektor (a,b,c) med norm $\sqrt{2}$ som bildar vinkeln $\frac{\pi}{2}$ med vektorn $(0,1,1)$ och vinkeln $\frac{\pi}{3}$ med vektorn $(1,1,0)$.

4. Beräkna arean av den triangel som har hörn i punkterna (3,-1,1) , (4,1,0) och (2,-3,0).

5. Lös ekvationen $z^6 = -64$.

6. För den linjära avbildningen T: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1,0) = (1,3)$ och $T(0,1) = (1,4)$. Visa att T är inverterbar och bestäm $T^{-1}(2,5)$.

7. Matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde $\lambda = -2$. Bestäm matrisens övriga egenvärden och alla egenvektorer.

VGV

8. En rät linje går genom punkten $(1,2,3)$ och är parallell med de båda planen $x-2y+z=1$ och $2x+2y-3z=2$. Bestäm linjens ekvation på parameterform.

Del 2

9. Visa att $z=i$ är en rot till ekvationen $z^3+(1-3i)z^2-(1-4i)z+5-i=0$. Bestäm de övriga rötterna. Ledning: $\sqrt{625}=25$.

10. Linjerna L_1 och L_2 ges av $(x,y,z)=(3,4,1)+t(4,1,0)$ respektive $(x,y,z)=(-1,7,5)+s(4,2,1)$. Visa att linjerna skär varandra och beräkna avståndet från skärningspunkten till den punkt på L_2 som ligger närmast punkten $(15,7,1)$ på L_1.

11a. Avgör vilken typ av kägelsnitt (conic) som beskrivs av ekvationen $5x^2-2xy+5y^2=4$. (2p)

b. Rotera koordinatsystemet så att kurvan hamnar på huvudaxelform (standard position). Ange formeln för koordinatbytet och kurvans ekvation i de nya koordinaterna x' och y'. (3p)

12. Två kvadratiska matriser A och B sägs vara similära ($A \sim B$) om det finns en inverterbar matris P så att $B=P^{-1}AP$.

a. Visa att om A är inverterbar och $A \sim B$ så är även B inverterbar. (2p)

b. Visa att om A är inverterbar så är $AB \sim BA$ för varje B. (3p)