Lösningar till tentamen i kurs 5B1128 Linjär algebra I, LV för L och V 030818

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 9 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & a-6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$

Systemet är lösbart endast om $a = 5$. Då fås oändligt många lösningar

$z = t$ ger $y = \dfrac{1+3t}{4} \Rightarrow x = \dfrac{3-7t}{4}$.

2. Vi söker A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Det ger $X = A^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -10 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

3. Låt $\overline{v} = proj_{\overline{a}}\, \overline{u} = \dfrac{(1,0,1)\cdot(1,2,2)}{1^2+2^2+2^2}(1,2,2) = \dfrac{(1,2,2)}{3}$ och

$\overline{w} = \overline{u} - \overline{v} = (1,0,1) - \dfrac{(1,2,2)}{3} = \dfrac{(2,-2,1)}{3}$. Den sökta arean ges då av $\dfrac{\|\overline{v}\|\|\overline{w}\|}{2} = \dfrac{1}{2}ae$ eftersom

$\|\overline{v}\| = \dfrac{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}{3} = 1$ och $\|\overline{w}\| = \dfrac{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}{3} = 1$.

4. En normalvektor till planet ges av $\overline{n} = (1,-2,3)$ dvs planets ekvation är

$x - 2y + 3z = D$. Insättning av punkten $(2,7,3)$ ger $D = -3$. Skärningspunkten uppfyller ekv $2 + t - 2(2-2t) + 3(2+3t) = -3$ vilket ger $t = -\dfrac{1}{2}$. Insättning i linjens ekv ger nu $(x,y,z) = (2-\dfrac{1}{2},\ 2+1,\ 2-\dfrac{3}{2}) = (\dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{2})$.

5. Vi kallar täljarens och nämnarens tal z_1 resp z_2 och söker deras polära form:

$$z_1 = -1+i. \quad |z_1| = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}. \; z_1 = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cos\theta = -1 \\ \sqrt{2}\sin\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}. \Rightarrow$$

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$z_2 = 1+i\sqrt{3}. \quad |z_2| = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2. \; z_2 = 2(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\theta = 1 \\ 2\sin\theta = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}. \Rightarrow$$

$$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3})) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}) .$$

6. Avbildningens matris är $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Det betyder att T är injektiv vilket i sin tur innebär att olika punkter avbildas på olika punkter.

7. Med $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ kan vi skriva ekvationen som $\bar{x}^T A\bar{x} = 6$ där $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Vi söker Matrisens egenvärden: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$. Det ger egenvärdena -2 och 3 vilket betyder att kurvan är en hyperbel.

8. Betrakta den parallellepiped som spänns av de tre vektorerna. Den har en volym som ges av absolutbeloppet av

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ -3 & 1 & -1 \\ a & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 10 & 3a-1 \\ 0 & 2-3a & -2-a^2 \end{vmatrix} = -a^2 - 9a - 18.$$

Vektorerna ligger i samma plan om och endast om volymen är 0 och polynomets nollställen är a = -3 och -6.

Del 2

9. Vi ser att $z = 1$ är en rot. Division med $z - 1$ ger faktorn $z^2 + (i-4)z + 5 - 5i$. Dess nollställen fås via kvadratkomplettering: $(z + \frac{i-4}{2})^2 - \frac{(i-4)^2}{4} + 5 - 5i = 0 \Rightarrow (z + \frac{i-4}{2})^2 = -\frac{5}{4} + 3i$. Med $z + \frac{i-4}{2} = x + iy$ fås $\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{5}{4} \\ 2xy = 3 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{2x} \Rightarrow x^4 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-5 \pm 13}{8}$.

Detta ger $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 - \frac{i}{2} + 1 + \frac{3}{2}i = 3 + i \\ z_2 = 2 - \frac{i}{2} - 1 - \frac{3}{2}i = 1 - 2i \end{cases}$

10. Den sökta matrisen $[T] = [T_3][T_2][T_1]$ där $[T_i]$, $i = 1,2,3$ ges av att dess kolumner är $T_i(1,0)$ och $T_i(0,1)$.

$$T_1(1,0) = (\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \quad T_1(0,1) = (-\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow [T_1] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$T_2(1,0) = (0,0) = , \; T_2(0,1) = (0,1) \Rightarrow [T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3(1,0) = (0,1), \; T_3(0,1) = (1,0) \Rightarrow [T_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[T] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Låt (x, y) vara en godtycklig punkt på linjen. Att den avbildas på origo ger

$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + \sqrt{3}y = 0$ som alltså är den sökta linjens ekvation.

11. Vi diagonaliserar A: Karakteristiska ekvationen är

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 5) + 18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, 1$. Egenvektorer söks:

$$\lambda = -2: \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

$$\lambda = 1 \;: \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

Vi väljer $t = 1$ i båda fallen och får $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Då är $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och

$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ur detta fås $A = PDP^{-1}$ och

$$A^7 = PD^7P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-2)^7 & 0 \\ 0 & 1^7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 & 258 \\ -129 & -258 \end{bmatrix}.$$

12a. $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$ VSB!

12b. $\det C = \det C^T = \det(-C) = (-1)^n \det C = -\det C$ om n är udda. Det ger $\det C = 0$ VSB!

12c. $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$. Låt $\begin{cases} B = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ C = \frac{1}{2}(A - A^T) \end{cases}$ Då fås

$B^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$ dvs B är symmetrisk. C är antisymmetrisk enligt a.