Institutionen för matematik
KTH

**Tentamen i kurs 5B1128 Linjär algebra I, LV för L och V.**
**Måndagen den 18 augusti 2003 kl 0800-1300.**

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 8 uppgifter à 3 poäng. Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på lappskrivning n (n=1,2,3,…7) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas. För att uppnå betyg 3 krävs minst 15 poäng.
Del 2 är avsedd för betyg 4 och 5 och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng. Betygsgränser för dessa betyg är 9 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betyg 3 uppnåtts på del 1.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

**Del 1**

1. Bestäm konstanten $a$ så att ekvationssystemet
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-y+6z=2 \\ 6x+2y+9z=a \end{cases}$$
har lösningar samt bestäm alla dessa.

2. Lös matrisekvationen $AX = B^T$ där
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{u} = (1,0,1)$ på vektorn $\mathbf{a} = (1,2,2)$ och beräkna arean av den rätvinkliga triangel vars hypotenusa ges av $\mathbf{u}$ och vars ena katet ges av ovan nämnda projektion.

4. Ett plan går genom punkten $(2,7,3)$ och skär linjen $(x, y, z) = (2,2,2) + t(1,-2,3)$ ortogonalt. Bestäm skärningspunkten.

5. Skriv det komplexa talet $\dfrac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ på polär form.

6. En linjär avbildning $T$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definieras av
$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 3x_2 \\ w_2 &= \phantom{x_1 +{}} 2x_2 - x_3 \\ w_3 &= x_1 + \phantom{3x_2 +{}} x_3 \end{aligned}$$
där $(w_1, w_2, w_3) = T(x_1, x_2, x_3)$. Avgör om $T$ är injektiv (one-to-one) och definiera vad som menas med det.

VGV

7. Avgör vilken typ av kägelsnitt (conic) som beskrivs av ekvationen $2x^2 - 4xy - y^2 = 6$.

8. De tre vektorerna (1,3, $a$ ), (-3,1,-1) och ( $a$ , 2,-2) har alla begynnelsepunkt i origo.

   För vilka reella tal $a$ ligger de i samma plan?

**Del 2**

9. Lös ekvationen $z^3 + (i-5)z^2 + (9-6i)z + 5i - 5 = 0$.

10. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ som sammansätts av en rotation moturs $\dfrac{\pi}{6}$ radianer följd av en ortogonal projektion på $y$-axeln följd av en spegling i linjen $y = x$. Det finns en linje som avbildas på origo. Bestäm dess ekvation.

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$. Bestäm en matris $P$ sådan att $P^{-1}AP$ är diagonal. Använd sedan detta för att beräkna matrisen $A^7$.

12. Låt $C$ vara en kvadratisk matris. Om $C^T = -C$ sägs $C$ vara antisymmetrisk.
    a. Låt $A$ vara en kvadratisk matris. Visa att $A - A^T$ är antisymmetrisk. (1p)

    b. Låt $C$ vara en antisymmetrisk $n \times n$ matris. Visa att $detC = 0$ om n är udda. (2p)

    c. Visa att till varje kvadratisk matris $A$ finns en symmetrisk matris $B$ och en antisymmetrisk matris $C$ så att $A = B+C$. (2p)