Institutionen för Matematik, KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra I, 5B1108 och 5B1128, 16 augusti 2004.

1. Vi multiplicerar med inverserna till $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$, till vänster respektive till höger, för att lösa ut $\mathbf{X}$. Vi får

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(\mathbf{B}^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Kvadratkomplettering omformar ekvationen till

$$(z - \frac{3}{2})^2 = \frac{-3-4i}{4}.$$

Ansatsen $w = a + ib$ satisfierande $w^2 = -3 - 4i$ ger ekvationerna

$$a^2 - b^2 = -3, \quad 2ab = -4, \quad a^2 + b^2 = 5,$$

där den sista ekvationen kommer från att beloppet av w^2 är lika med beloppet av $-3-4i$. Första och sista ekvationen ger att $2a^2 = 2$, dvs $a = \pm 1$. Därur $w = \pm(1 - 2i)$. Vi får

Svar: $z = \frac{3}{2} \pm \frac{1-2i}{2}$ dvs $z = 2 - i$ eller $z = 1 + i$.

3. Gausselimination ger lösningsmängden

Svar: $(x, y, z) = (-1, 2, 2)$.

4. Vi använder DeMoivres formel. Då $1 + i$ har beloppet $\sqrt{2}$ och argumentet $\pi/4$, $1 - i$ har beloppet $\sqrt{2}$ och argumentet $-\pi/4$ och $1 - i\sqrt{3}$ har belopp 2 och argumentet $-\pi/3$ får det givna uttrycket belopp och argument

$$\frac{\sqrt{2}^{18} \cdot 2^{17}}{\sqrt{2}^{52}} = 1 \quad \text{respektive} \quad 18 \cdot \pi/4 + 17 \cdot (-\pi/3) - 52 \cdot (-\pi/4) = 12\pi - \pi/6.$$

Det är det komplexa talet

Svar: $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

5. Ekvationen kan skrivas

$$(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$

eller förenklat $x + 2y + 3z = 6$. Punkten $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ ligger inte planet eftersom dessa värden på x, y och z inte satisfierar denna ekvation.

6.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Låt $P = (1,0,1)$, $Q = (2,1,1)$, $R = (-1,4,4)$ och $T = (0,1,2)$. Vektorerna $PQ = (1,1,0)$, $PR = (-2,4,3)$ och $PT = (-1,1,1)$ ligger i samma plan eftersom determinanten med dessa vektorer som kolonner är lika med noll:

$$det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Vi bestämmer nu vinkeln α mellan vektorerna PQ, PR och vinkeln β mellan PQ och PT.

$$\cos(\alpha) = \frac{PQ \cdot PR}{\sqrt{PQ \cdot PQ}\sqrt{PR \cdot PR}} = \frac{2}{\sqrt{58}} \quad \text{och} \quad \cos(\beta) = \frac{PQ \cdot PT}{\sqrt{PQ \cdot PQ}\sqrt{PT \cdot PT}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0.$$

Alltså är dessa vinklar spetsiga. Vi undersöker nu vilken orientering dessa vektorer har. För den skull kan det vara praktiskt att ta fram en normal till det plan i vilket punkterna ligger. Kryssprodukt t ex $(1,-1,2)$. Vi betraktar trippelprodukten av denna vektor men vektorern $PQ = (1,1,0)$, $PR = (-2,4,3)$ och $PT = (-1,1,1)$ parvis. Tecknet avgör orienteringen:

$$det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 18, \quad det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 6, \quad det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 18.$$

Står vi i punkten P med huvudet i normalens riktning på planet i vilket punkterna ligger så till höger har vi PQ och 90 grader till vänster PT och någonstans imellan PR. Vi gör nu samma betraktelse utifrån punkten Q. Med hjälp av trippelprodukten får vi att om vi står i punkten Q med huvudet i givna normalens riktning ser vi punkterna från höger räknat R, T och P. Enda möjliga fyrhörning är en fyrhörning sammansatt av två trianglar: PQT och QTR. Deras areor beräknas med hjälp av kryssprodukt:

$$area(PQT) = \frac{1}{2} \mid (1,1,0) \times (-1,1,1) \mid = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad area(QTR) = \frac{1}{2} \mid (-3,3,3) \times (-2,0,1) \mid = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Svar: $2\sqrt{6}$.

8. Vi bestämmer först mängden av $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sådana att $A\mathbf{x}^T = 0$. Denna ekvation är ekvivalent med ekvationssystemet

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0$$

som efter Gausselimination funnes ha lösningarna $(x_1, x_2, x_3) = t(1,1,-1)$, t godtyckligt reellt tal.

9. Vi bestämmer egenvärden till den matris

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

som hör ihop med den givna kvadratiska formen. Karakteristiska ekvationen

$$det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

har rötterna $\lambda = 2$ (dubbel) och $\lambda = 8$. Då alla egenvärden är positiva så beskriver den kvadratiska formen en ellipsoid.

10. Bestämmer först egenvärden och egenvektorer på sedvanligt sätt. Karkteristiska polynomet

$$det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

har nollställena $\lambda = 1$ och $\lambda = 4$. Tillhörande egenvektorer blir för $\lambda = 1$, $(x, y) = t(1, -1)$, och för $\lambda = 4$, $(x, y) = t(2, 1)$. Med nedanstående matriser Toch D kan A uttryckas: $A = TDT^{-1}$ och $A^n = TD^nT^{-1}$,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Då

$$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

så

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\cdot 4^n & -2+2\cdot 4^n \\ -1+4^n & 2+4^n \end{pmatrix}.$$