Lösningar till tentamen i kurs 5B1130 Matematiska metoder I, för S 040206

Del 1

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 9 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & a-6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$

   Systemet är lösbart endast om $a = 5$. Då fås oändligt många lösningar

   $z = t$ ger $y = \dfrac{1+3t}{4} \Rightarrow x = \dfrac{3-7t}{4}$.

2. $\sqrt{3}+3i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. $r = \left|\sqrt{3}+3i\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}\sin\theta = 3 \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$.

   Detta ger $\sqrt{3}+3i = \sqrt{12}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. Ur detta fås med hjälp av de Moivres formel:

   $(\sqrt{3}+3i)^{18} = 12^{18/2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{18} = 12^9(\cos\frac{18\pi}{3} + i\sin\frac{18\pi}{3}) = 12^9$.

3. $f'(x) = \dfrac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2} \cdot \dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{1+x^2} = 0$. För $x > -1$ är f alltså konstant.

   Det ger att $f(17) = f(0) = \arctan 1 - \arctan 0 = \dfrac{\pi}{4}$.

4. Gränsvärdet är av typen $\dfrac{0}{0}$ och upprepad användning av l´Hospitals regel (samma typ fås i varje steg) ger $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^x - 2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\cos x + 8\cos 2x}{2e^x} = 3$.

5. Vi substituerar: $u = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2udu$. Det ger $2\int_2^3 \dfrac{du}{u^2-1} = \int_2^3 (\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1})du =$

   $= \left[\ln|u-1| - \ln|u+1|\right]_2^3 = \ln 2 - \ln 4 - \ln 1 + \ln 3 = \ln 3 - \ln 2$.

6. Serien är positiv. Termerna uppför sig som $(\frac{2}{3})^n$ för stora n - värden. Jämförelse med den konvergenta geometriska serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$ ger $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{3^n-1}\cdot\dfrac{3^n}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{3^n}} = 1$. Det innebär att den givna serien också är konvergent.

7. Funktionen är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet. Det säkerställer att f antar ett största och ett minsta värde där vilket måste ske i en kritisk punkt, i en singulär punkt eller i en av intervallets ändpunkter. $f'(x) = \sqrt{x-1} + \dfrac{x-4}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{3x-6}{2\sqrt{x-1}} = 0$ ger den enda kritiska punkten $x = 2$ och den enda singulära punkten $x = 1$. Vi jämför nu funktionens värden i de tre intressanta punkterna: $f(2) = -2$, $f(1) = 0$, $f(5) = 2$. Det minsta värdet är alltså –2 och det största är 2.

8. Arean ges av $2\pi \int_0^1 |y| \sqrt{1+(y')^2}\, dx$. Betrakta den del av parabeln där $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Vi får arean
$$2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\, dx = 2\pi \left[\frac{2}{3}(x+\frac{1}{4})^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\left[(\frac{5}{4})^{3/2} - (\frac{1}{4})^{3/2}\right] = \frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)\ ae$$

Del 2

9. Kalla punkterna A, B resp C. Vi bildar vektorerna mellan A och B resp mellan A och C. Dessa blir $(3,-1,1)$ resp $(2,0,2)$.Vi söker nu en normalvektor till planet och bildar därför deras kryssprodukt: $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2,-4,2)$. Vi väljer $(1,2,-1)$. Planets ekv är då $x + 2y - z = d$. Insättning av tex punkten (0,1,-2) ger $d = 4$ .Linjens riktningsvektor (3,1, b) är ortogonal mot planets normalvektor. Det ger $(3,1,b)\cdot(1,2,-1) = 0 \Rightarrow b = 5$. ($a$, 1,-1) är en punkt på linjen. Den ligger i planet om $a + 2\cdot 1 - (-1) = 4 \Rightarrow a = 1$.

10. Det homogena problemets karakteristiska ekv är $r^2 - 8r + 25 = 0 \Rightarrow r = 4 \pm 3i$. Det ger den allmänna homogena lösningen $y_h = e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. En partikulärlösning söks på formen
$$y_p = (ax+b)e^{-x} \Rightarrow y_p' = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = -(ax+b-a)e^{-x} \Rightarrow$$
$$y_p'' = -ae^{-x} + (ax+b-a)e^{-x} = (ax+b-2a)e^{-x}.$$
Insättning i differentialekvationen ger nu
$$\left[ax+b-2a+8(ax+b-a)+25(ax+b)\right]e^{-x} = (34x+24)e^{-x} \Rightarrow 34ax+34b-10a = 34x+24.$$
Vi får $a = b = 1$ dvs $y_p = (x+1)e^{-x}$. Differentialekvationens allmänna lösning är då

$y = y_h + y_p = e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + (x+1)e^{-x}$. $y(0) = C_1 + 1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow$
$y = C_2 e^{4x} \sin 3x + (x+1)e^{-x} \Rightarrow y' = C_2(4e^{4x} \sin 3x + 3\cos 3x e^{4x}) + e^{-x} - (x+1)e^{-x}$. $y'(0) = 3C_2 = 3 \Rightarrow$
$C_2 = 1$
Lösningen är alltså $y = e^{4x} \sin 3x + (x+1)e^{-x}$.

11. Integranden är obegränsad vid $x = 0$. Vi delar upp integralen:
$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}} = I_1 + I_2$. $0 \le I_1 \le \left\{x^2 + \sqrt{x} \ge \sqrt{x} \ \ på \ [0,1]\right\} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$.
Då är I_1 konvergent enligt majorantprincipen för generaliserade integraler.
$0 \le I_2 \le \left\{x^2 + \sqrt{x} \ge x^2 \ \ på \ [1,\infty[\right\} \le \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty}(1 - \frac{1}{R}) = 1$.
Då är I_2 också konvergent och alltså är den givna integralen konvergent.

12. Låt basen i den rätvinkliga triangeln vara x och den andra kateten vara y. Arean ges då av $A = \frac{xy}{2}$ och omkretsen av $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Detta ger
$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x - y \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy \Rightarrow y = 2\frac{1-x}{2-x} \Rightarrow$
$A = A(x) = \frac{x(1-x)}{2-x} \Rightarrow A'(x) = \frac{(1-2x)(2-x) + x(1-x)}{(2-x)^2} = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2}$. $A'(x) = 0 \Rightarrow$
$x = 2 \pm \sqrt{2}$ där det övre tecknet förkastas eftersom omkretsen är 2.
$x = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow y = 2\frac{(1 - 2 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2} \ cm^2$.
$A''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2 - 4x + 2)}{(x-2)^4} = ... = \frac{4}{(x-2)^3} \Rightarrow A''(2 - \sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.
Det betyder att den funna kritiska punkten ger ett maximum.