Lösningar till tentamen i kurs 5B1130 Matematiska metoder I, för S 040415

Del 1

1. Vi söker inversen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -5 & 26 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 9 & -47 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 26 \\ 10 & 9 & -47 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Det ger $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 21 & 32 \\ -37 & -55 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

2. En normalvektor till planet är $(1,-2,3)$ dvs planets ekv är $x - 2y + 3z = D$. Insättning av punkten $(2,7,3)$ ger $D = -3$. Skärningspunkten uppfyller ekv $2 + t - 2(2 - 2t) + 3(2 + 3t) = -3 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$. Insättning i linjens ekv ger nu $(x, y, z) = (2 - \frac{1}{2}; 2 + 1, 2 - \frac{3}{2}) = (\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{2})$.

3. Implicit derivering ger $e^y + xe^y y' + y' - 2 = 0$. Insättning av punkten ger nu $2 + 2y'(1) + y'(1) - 2 = 0 \Rightarrow y'(1) = 0$. Tangentlinjens ekv är då $y = \ln 2$.

4. Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$ och upprepad användning av l´Hospitals regel (samma typ fås i varje steg) ger $\lim_{x \to 1} \frac{\frac{\pi}{x} + \pi\cos\pi x}{-\pi\sin\pi x} = \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{\pi}{x^2} - \pi^2\sin\pi x}{-\pi^2\cos\pi x} = -\frac{1}{\pi}$.

5. Vi partialbråksuppdelar: $\frac{x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(x+1)^2}$

Det ger systemet $\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B + C = 1 \\ A = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{cases}$ Vi får integralen $\int_1^2 (-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2})\,dx$

vilket ger $\left[-\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{2}{x+1}\right]_1^2 = \ln\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$.

6. Potensseriens konvergensradie R ges av $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n} = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e$. Serien är då konvergent för $-e < x < e$ och divergent för $|x| > e$. Vi undersöker nu ändpunkterna:

$x = e$: $\sum_{n=0}^{\infty} n$. $\lim_{n\to\infty} n \neq 0$ dvs serien är divergent.

$x = -e$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n \neq 0$ (existerar ej) dvs serien är divergent.

Serien är alltså konvergent för $-e < x < e$.

7. Kvadratkomplettering ger $(z - \frac{2+3i}{2})^2 - (\frac{2+3i}{2})^2 - 1 + 3i = 0 \Rightarrow (z - \frac{2+3i}{2})^2 = -\frac{1}{4}$.

$w = z - \frac{2+3i}{2} = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{1}{4} & (1) \\ 2xy = 0 & (2) \end{cases}$ Ur (2) fås $x = 0$ ($y = 0$ går ej enligt (1) eftersom x är reellt). (1) ger då $y = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow w = \pm\frac{i}{2}$. Detta ger slutligen

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2+3i}{2} + \frac{i}{2} = 1 + 2i \\ z_2 = \frac{2+3i}{2} - \frac{i}{2} = 1 + i \end{cases}$$

8. $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^4} = 0 \Rightarrow x = -1, 3 \Rightarrow y' = -\frac{(x+1)(x-3)}{x^4}$.

Då är $y' > 0$, $1 < x < 3$ och $y' < 0$, $x > 3$ Det betyder att funktionen har ett maximum i punkten $x = 3$. Då $f(1) = -1$, $f(3) = \frac{5}{27}$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ fås att värdemängden ges av intervallet $\left(-1, \frac{5}{27}\right]$.

Del 2

9. Karakteristisk ekv för homogena differentialekvationen är $r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r = 2,3$.
Den allmänna homogena lösningen är då $y_h = Ae^{2x} + Be^{3x}$. Vi har ”resonans” och ansätter därför som partikulärlösning $y_p = cxe^{2x} \Rightarrow y_p' = C(1+2x)e^{2x} \Rightarrow y_p'' = 4C(1+x)e^{2x}$.
Insättning i diffekvationen ger $\left[4C(1+x) - 5C(1+2x) + 6Cx\right]e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow C = -1$ och den allmänna lösningen är $y = (A - x)e^{2x} + Be^{3x} \Rightarrow y' = (2A - 1 - 2x)e^{2x} + 3Be^{3x}$. Ur de båda begynnelsevillkoren fås då $\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + 3B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2e^{3x} - (x+2)e^{2x}$.

10. $$\begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & 4 & 1+3a & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-a^2) & 1+a & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & -2 \end{bmatrix}$$
Vi ser att för $a = -1,1$ är koefficientmatrisens determinant noll och entydig lösning kan ej erhållas. Vi får tre fall:
$a \neq \pm 1$: $z = -\dfrac{2}{1+a}$, $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1+3a}{1+a}$ dvs entydig lösning
$a = 1$: $z = -1$, $y = t \Rightarrow x = 2 - 2t$, $-\infty < t < +\infty$ dvs oändligt många lösningar
$a = -1$: Sista ekvationen ger $0 = -2$ dvs lösning saknas.

11. $y = \pm\dfrac{\sqrt{x}}{3}(x-3)$ dvs öglan består av två lika långa kurvbågar, en ovanför och en under x – axeln som möts i $x = 0$ och $x = 3$. Längden ges då av $L = 2\int_0^3 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ där

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x}\right) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow L = 2\int_0^3 \sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{4x}}\,dx = 2\int_0^3 \sqrt{\frac{4x+x^2-2x+1}{4x}}\,dx =$$
$$= \int_0^3 \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}}\,dx = \int_0^3 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ l.e.$$

12. Låt P ha koordinaterna $(t, f(t))$. Tangentlinjen i denna punkt har ekvationen $y - f(t) = f'(t)(x - t)$. Enligt förutsättningen om lika vinklar gäller att Q har koordinaterna $(2t, 0)$ och vi får efter insättning i tangentlinjens ekvation:
$0 - f(t) = f'(t)(2t - t) \Rightarrow f(t) + tf'(t) = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(tf(t)) = 0 \Rightarrow tf(t) = C$ där C är en godtycklig konstant. Det ger resultatet $f(x) = \dfrac{C}{x}$.