**Lösningar till tentamen i kurs 5B1130 Matematiska metoder I, för S 040819**

**Del 1**

1. $$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 & a \\ 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & -1 & 2 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 4 & -5 & a \\ 0 & -4 & 5 & -3b+c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 4 & -5 & a \\ 0 & 0 & 0 & a-3b+c \end{bmatrix}$$

   Systemet är konsistent om och endast om $a-3b+c=0$.

2. Vi visar att systemet som bildas av de tre ekvationerna har oändligt många lösningar vilka ges av en parameter:

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -4 & 2 & -14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Detta ger lösningar

   $z=t$, $y=\frac{7}{2}+\frac{t}{2}$, $x=-2-t$ dvs parameterekv för en linje med riktningsvektor (-2,1,2)

3. Logaritmen är definierad endast för positiva argument. Det ger $\sqrt{1-x^2}>0 \Rightarrow 1-x^2>0$ dvs definitionsområdet är det öppna intervallet $-1<x<1$.

   $$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{1-x^2}.$$

4. Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$ och upprepad användning av l´Hospitals regel (samma typ fås i varje steg) ger $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2\cos x-x\sin x}=1.$

5. $$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{R\to\infty}\int_e^R \frac{dx}{x(\ln x)^2}=\left\{\begin{matrix} u=\ln x \\ du=\frac{dx}{x}\end{matrix}\right\}=\lim_{R\to\infty}\int_1^{\ln R}\frac{du}{u^2}=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^{\ln R}=1-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\ln R}=1.$$

6. Serien är positiv. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+\sqrt{n}}{n^3+1}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+n}{n^3+1}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n^3+1}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n^3}=3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ som är en konvergent $p-$serie ($p=2>1$). Enligt majorantprincipen är då den givna serien konvergent.

7. Volymen ges av $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -15 \end{vmatrix} = 75 - 30 = 45$ *ve.*

8. $f$ är definierad för $x \geq 0$. $f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+x)} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ är den enda kritiska punkten. Då derivatan är positiv till vänster och negativ till höger om denna punkt är den en lokal maxpunkt. Ändpunkt (och singulär) är $x = 0$. Eftersom derivatan är positiv till höger om denna punkt är den en lokal minpunkt.

**Del 2**

9. Vi ser att $x = -1$ är ett nollställe till nämnaren. Division med $x+1$ ger kvoten $x^2+1$ och resten 0 dvs $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}$. Partialbråksuppdelning ger :

$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + A + C}{(x+1)(x^2+1)}$. Det ger ekvationssystemet

$\begin{cases} A + B \quad = 0 \\ \quad B + C = 1 \\ A + \quad C = 0 \end{cases} \Rightarrow B = C = \frac{1}{2}, \quad A = -\frac{1}{2}$ och vi får

$\int \frac{xdx}{x^3+x^2+x+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) +$

$+\frac{1}{2}\arctan x + D.$

10. Vi bestämmer först rötterna till ekv $z^8 + 64 = 0$. Ekvationen kan skrivas som

$z^6 = -64 = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi)$. Ur detta fås de sex rötterna

$z_k = 2(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $\theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}$, $k = 0,1,2,3,4,5$. Reella rötter saknas vilket innebär att reella förstagradsfaktorer saknas. Rötterna är parvis komplexkonjugerade (polynomet har ju reella koefficienter):

$z_{0,5} = \sqrt{3} \pm i$, $z_{2,3} = -\sqrt{3} \pm i$, $z_{1,4} = \pm 2i$. Polynomet är produkten av de sex faktorerna $z - z_k$, $k = 0,1,2,3,4,5$. Dessa paras nu ihop så att vi får tre andragradsfaktorer med reella koefficienter:

$(z - z_0)(z - z_5) = (z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i) = (z - \sqrt{3})^2 + 1$

$(z - z_2)(z - z_3) = (z + \sqrt{3} - i)(z + \sqrt{3} + i) = (z + \sqrt{3})^2 + 1$ Produkten av dessa blir

$(z - z_1)(z - z_4) = (z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$

$x^6 + 64 = (x^2 - 2\sqrt{3}x + 4)((x^2 + 2\sqrt{3}x + 4)(x^2 + 4)$.

11. Vi använder Maclaurinutvecklingarna på sid 290 i Adams:

$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + O(x^6)$ , $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^5)$ . Vi multipliceerar nu ihop dessa:

$$\frac{e^{2x}}{1-x^2} = (1 + x^2 + x^4 + O(x^6))(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^5)) =$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^4 + O(x^5) \Rightarrow c_0 = 1 , \quad c_1 = 2 , \quad c_2 = 3, \quad c_3 = \frac{10}{3}, \quad c_4 = \frac{11}{3}$$

12. Den sökta kurvbågen sammanbinder två punkter där två ljusstrålar från punkten (1,0) tangerar kurvan. $y' = \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ och i en punkt $(a, a\sqrt{a})$ på kurvan har tangentlinjen ekvationen $y = \frac{3}{2}\sqrt{a}(x-a) + a\sqrt{a}$ . Eftersom punkten (1,0) måste satisfiera denna ekvation fås $0 = \frac{3}{2}\sqrt{a}(1-a) + a\sqrt{a} = \frac{\sqrt{a}}{2}(3-a)$ vilket ger $a = 0{,}2$ .

Längden av bågen är då

$$\int_0^3 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \left[(1+\frac{9}{4}x)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\right]_0^3 = \frac{8}{27}((\frac{31}{4})^{3/2} - 1) = \frac{31\sqrt{31}-8}{27} \; le.$$