Lösningar till tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II, för S 040528

Del 1

1. Standardmatrisen är $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0 \Rightarrow T^{-1}$ existerar.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}(2,5)=(3,-1).$$

2.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ -3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -3\\ 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\ 24\\ 30\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 5\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12\\ -16\\ 20\end{bmatrix}=-4\begin{bmatrix}3\\ 4\\ -5\end{bmatrix}$$

Det ger att vektorerna är egenvektorer hörande till egenvärdena 1, 6 och –4 resp.

3. Kedjeregeln ger $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x})=f''(u)(\dfrac{\partial u}{\partial x})^2+f'(u)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(u)(2x+y)^2+2f'(u)$

$(x,y)=(1,1)\Rightarrow u=3\Rightarrow \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1)=2\cdot 3^2+1\cdot 2=20.$

4. I det inre av området gäller $\mathit{grad} f=(2x,-1)\neq(0,0)$. Vi undersöker de tre ränderna:

$g(x)=f(x,\frac{x}{2})=x^2-\frac{x}{2}\Rightarrow g'(x)=2x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}.\ g(\frac{1}{4})=-\frac{1}{16}$.

$g(y)=f(1,y)=1-y\Rightarrow g'(y)=-1\neq 0.$

$g(x)=f(x,2x)=x^2-2x\Rightarrow g'(x)=2x-2=0\Rightarrow x=1.$ Detta ger en hörnpunkt.

Hörnpunkter: $f(0,0)=0$, $f(1,2)=-1$, $f(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Jämförelse mellan de intressanta punkternas funktionsvärden ger att största värdet är 0.5 och det minsta är -1.

5. $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}-\dfrac{\partial F_1}{\partial y}=2x-2x=0$. Det ger att fältet är konservativt. Vi byter då väg:

Längs $x-$axeln från 1 till 0 ger: $\begin{cases}x=t\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=dt\\ dy=0\end{cases}\Rightarrow\int_1^0 0\,dt=0.$

Längs $y-$axeln från 0 till 1 ger: $\begin{cases}x=0\\ y=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=0\\ dy=dt\end{cases}\Rightarrow\int_0^1 -3t^2dt=-1.$

Linjeintegralens värde är alltså 0 + (-1) = -1. (Om man bestämmer en potential fås $\phi=x^2y-y^3+C$.)

6. Området V är en paraboloidskål med platt lock. Vi använder divergenssatsen:
$\oiint_S \overline{F}\cdot\hat{N}dS = \iiint_V div\overline{F}dxdydz = \iiint_V (x+2z)dxdydz$. x – termen ger inget bidrag pga

symmetri och vi får $2\iiint_V zdxdydz = 2\iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{1} zdz = \iint_D (1-(x^2+y^2)^2)dxdy$

där D är områdets projektion på xy – planet. Polära koordinater i denna cirkelskiva ger

flödet $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^4)rdr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$.

7. Vi ser att området utgörs av en triangel med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(2,1)$.
Då detta område är både x – och y - enkelt kan vi även skriva integralen som

$$\int_0^2 e^{x^2}\left(\int_0^{x/2} dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}xdx = \frac{1}{4}\left[e^{x^2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}(e^4-1).$$

8. Riktningsderivatan $D_{\overline{u}}f = gradf\cdot\overline{u}$ där $\|\overline{u}\| = 1 \Rightarrow \overline{u} = \frac{1}{5}(3,4)$. Vi söker derivatorna

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$. Implicit derivering map x resp y i ekvationen ger

$$\begin{cases} 3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+z+x\frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ 3y^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial y}+5=0 \end{cases}$$

Insättning av punkten $(1,1)$ ger $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -1$ och

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2$. Det ger riktningsderivatan $(-1,-2)\cdot\frac{1}{5}(4,3) = -2$.

Del 2

9. Kolumnerna i P är ortonormala egenvektorer till A. Karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-4) = 0 \Rightarrow \lambda = 1,1,4.$$

Egenvektorerna söks:

$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -s-t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \overline{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}t.$$

Alla vektorer i det plan som spänns av de två vektorerna är egenvektorer med egenvärde 1 .

Vi konstruerar en vektor i detta plan som är ortogonal mot (-1,1,0) med hjälp av ortogonal projektion: $(-1,0,1)-\dfrac{(-1,0,1)\cdot(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|^2}(-1,1,0)=\dfrac{1}{2}(-1,-1,2)$. Som de två första kolumnerna i matrisen P kan vi då välja $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$.

$$\lambda=4:\begin{bmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&0\\1&1&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=t\\x_2=t\Rightarrow \bar{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}t\,.\\x_3=t\end{cases}$$

Det ger matrisen $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}&-1&\sqrt{2}\\\sqrt{3}&-1&\sqrt{2}\\0&2&\sqrt{2}\end{bmatrix}$.

10. $\begin{cases}f_x'=x-yz\\f_y'=y^3-xz\\f_z'=z^5xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_{xx}''=1\,,\ f_{xy}''=-z\,,\ f_{xz}''=-y\\f_{yy}''=3y^2\,,\ f_{yz}''=-x\\f_{zz}''=5z^4\end{cases}$ Vi ser att i punkten $(1,1,1)$ gäller att $grad\,f=(0,0,0)$ och att Hessematrisen ges av $H=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&5\end{bmatrix}$.

(1,1,1) är alltså en kritisk punkt. Dess karaktär kan fås genom att studera teckenväxlingen hos Hessematrisens huvuddiagonaldeterminanter:

$$\det[1]=1\,,\ \det\begin{bmatrix}1&-1\\-1&3\end{bmatrix}=2\,,\ \det H=\det\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&2&-2\\0&-2&4\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}2&-2\\-2&4\end{bmatrix}=4.$$

Då alla dessa har positivt tecken är andragradsformen positivt definit och f har ett lokalt minimum i punkten $(1,1,1)$.

11. a) f är kontinuerlig i origo om $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$. Om vi går in mot origo längs $y-$axeln blir gränsvärdet 0 eftersom $f(0,y)=0$. Om vi i stället går in mot origo längs kurvan $y=-x^{2/3}$ $(y^3=-x^2)$ blir gränsvärdet -1 . Det betyder att f inte är kontinuerlig i origo.

b) De partiella derivatorna i origo existerar dock:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = 0$$

12. Skålens kant ges av $\begin{cases} z = 4(x^2+y^2) \\ z = x^2+3y^2+3 \end{cases}$. Projektionen av denna på $xy-$planet ges av ellipsen $3x^2+y^2=3$. Vatten börjar rinna över den lägst belägna punkten (x, y, z) på skålens kant. Då gäller :

1. (x, y, z) ligger på skålens kant $\Rightarrow z = 4x^2+4y^2$
2. (x, y, z) projiceras på ellipsen $3x^2+y^2=3$
3. z är det minsta tal som uppfyller 1. och 2.

Vi söker det minsta värdet av $z = 4x^2+4y^2$ då $3x^2+y^2=3$. På ellipsen är $y^2 = 3-3x^2 \Rightarrow z = 12-8x^2$, $-1\le x\le 1$. Minsta värdet antas i ändpunkterna och är $z=4$. Skålen kan alltså maximalt fyllas till nivån av planet $z=4$. Vi beräknar volymen av den kropp som begränsas av planet $z=4$ och ytan $z=4(x^2+y^2)$. Planet skär ytan längs en kurva vars projektion på $xy-$planet ges av $4(x^2+y^2)=4 \Rightarrow x^2+y^2=1$. Om D är området innanför denna cirkel ges den sökta volymen av

$$\iint_D dxdy \int_{4(x^2+y^2)}^{4} dz = \iint_D (4-4(x^2+y^2))dxdy = \{Polära\, koord\} = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)r\,dr = 2\pi v.e.$$