Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II för S.
Fredagen den 28 maj 2004 kl 1400-1900.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 8 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå betyg 3 krävs minst 18 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,3,…,6) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Om 3 poäng erhålls på någon av de sex första uppgifterna räknas det i fortsättningen som om motsvarande kontrollskrivning varit godkänd.
Del 2 är avsedd för betyg 4 och 5 och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng. Betygsgränser för dessa betyg är 9 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betyg 3 uppnåtts på del 1 eller via sex godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. För den linjära avbildningen $T:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1,0) = (1,3)$ och $T(0,1) = (1,4)$. Visa att T är inverterbar och bestäm $T^{-1}(2,5)$.

2. Visa att vektorerna (4,-3,0), (3,4,5) och (3,4,-5) är egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ och ange motsvarande egenvärden.

3. Låt $g(x,y) = f(u(x,y))$ där $u(x,y) = x^2 + xy + y^2$ och f är en två gånger deriverbar funktion för vilken gäller att $f'(3) = 1$ och $f''(3) = 2$. Beräkna $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1)$.

4. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 - y$ i det slutna och begränsade område som avgränsas av linjerna $y = 2x$, $y = \dfrac{x}{2}$ och $x = 1$.

5. Beräkna linjeintegralen $\int_C 2xy\,dx + (x^2 - 3y^2)dy$ där C är den del av cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ som genomlöps från punkten (1,0) till punkten (0,1).

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\overline{F} = (0, xy, z^2)$ ut genom begränsningsytan till det ändliga område som innesluts av ytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 1$.

7. Beräkna den itererade integralen $\int_0^1 \left(\int_{2y}^2 e^{x^2}\,dx \right) dy$.

VGV

8. Ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + xz + 5y = 9$ definierar i en omgivning av punkten $(1,1)$ en funktion $z = f(x,y)$ sådan att $f(1,1) = 1$. Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1,1)$ i den riktning som ges av vektorn $(4,3)$.

Del 2

9. Bestäm en matris P som ortogonalt diagonaliserar matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

10. Undersök om funktionen $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^4}{4} + \dfrac{z^6}{6} - xyz$ har ett lokalt extremvärde i punkten $(1,1,1)$.

11. Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^4 + (x^2 + y^3)^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Avgör om f är kontinuerlig i origo. (3p)

b) Existerar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ i origo? (2p)

12. En skål har formen av den del av ytan $z = 4(x^2 + y^2)$ som ligger under ytan $z = x^2 + 3y^2 + 3$. Man fyller skålen med vatten. Hur mycket vatten rymmer skålen innan det börjar rinna över?