Lösningar till tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II, för S 040817

Del 1

1. Låt avbildningens matris vara $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   Ur dessa matrisekvationer fås $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$ dvs T är injektiv.

2. Vi söker matrisens egenvärden och egenvektorer:

   $$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-6)-4=\lambda^2-9\lambda+14=0 \Rightarrow \lambda = 2,7.$$

   $\lambda = 2: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Det ger egenvektorerna $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}t,\ -\infty < t < +\infty$

   $\lambda = 7: \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Det ger egenvektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}t,\ -\infty < t < +\infty$

   En matris som diagonaliserar A är då $P=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ som ger diagonalmatrisen $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

3. I punkten $(1,0)$ fås $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{-5y}{(x+y)^2}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{5x}{(x+y)^2}=5 \Rightarrow \nabla f(1,0)=(0,5)$.

   Riktningsderivatan i den givna riktningen ges då av $\nabla f(1,0)\cdot\dfrac{(4,3)}{5}=3$. Eftersom riktningsderivatans största värde i punkten $(1,0)$ är $\|\nabla f(1,0)\|=5$ finns ingen riktning i vilken den har värdet 6 .

4. I det inre av området gäller $\operatorname{grad} f = (2x+4y^2, 8xy)=(0,0)$. Det ger den enda kritiska punkten origo där funktionens värde är 0 . Vi undersöker randen där $x^2+4y^2=1$:

   $$g(x)=f(x,\pm\sqrt{(1-x^2)/4})=x^2+x(1-x^2) \Rightarrow g'(x)=2x+1-3x^2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3},1 .$$

   $x=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $x=1 \Rightarrow y=0$ vilket ger funktionsvärdena $-\dfrac{5}{27}$ resp 1 som alltså är funktionens minsta resp största värde i området.

5. $F_1=6xy-y^3$, $F_2=4y+3x^2-3xy^2 \Rightarrow \dfrac{\partial F_2}{\partial x}-\dfrac{\partial F_1}{\partial y}=0$. Det ger att fältet är konservativt.

   Vi kan då byta väg och väljer den räta linjen mellan origo och punkten $(0,1)$:

   $$\begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=0 \\ dy=dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 4t\,dt = 2.$$

6. Flödet ges av $I = \iint_S (xy,0,z^2)\cdot \hat{N}dS = \iint_D (xy,0,x^2+y^2)\cdot(f_1,f_2,-1)\,dxdy$ där S är den del av konytan som är under planet $z=1$ och D är dess projektion på $xy-$planet dvs enhetscirkelskivan och $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow f_1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_2 = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Vi får

$I = \iint_D \left(\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x^2+y^2)\right)dxdy$. Första termen ger inget bidrag pga symmetri och

polära koordinater i cirkelskivan ger flödet $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-r^2)rdr = 2\pi\left[-\dfrac{r^4}{4}\right]_0^1 = -\dfrac{\pi}{2}$.

7. $[\bar{v}]_B = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \Rightarrow \bar{v} = 1\cdot(1,-5)+3\cdot(0,3)=(1,4)$. Vi söker $[\bar{v}]_{B'} = \begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}$ vilket ger

$$(1,4) = C_1(-1,-1)+C_2(1,-2) \Rightarrow \begin{cases}-C_1 + \ C_2 = 1\\ -C_1 - 2C_2 = 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1 = -2\\ C_2 = -1\end{cases} \Rightarrow [\bar{v}]_{B'} = \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}.$$

8. Då e^{y^3} saknar elementär primitiv funktion (antiderivata) måste vi börja med $x-$integrationen. Integralen över det triangelformade området kan då skrivas:

$$\int_0^1 e^{y^3}dy\int_0^{2y} xdx = \int_0^1 e^{y^3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2y} dy = 2\int_0^1 y^2e^{y^3}dy = \frac{2}{3}\left[e^{y^3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(e-1) .$$

Del 2

9. Den sökta matrisen $[T]=[T_3][T_2][T_1]$ där $[T_i]$, $i=1,2,3$ ges av att dess kolumner är $T_i(1,0)$ och $T_i(0,1)$.

$T_1(1,0)=(1,0)$, $T_1(0,1)=(0,0) \Rightarrow [T_1] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$T_2(1,0)=(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $T_2(0,1)=(-\sin\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{3})=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})\Rightarrow[T_2]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$

$T_3(1,0)=(0,1)$, $T_3(0,1)=(1,0)\Rightarrow[T_3]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ Totalt ger detta $[T]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

Linjen $x=2$ ges av $\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}$. $[T]\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}$. Det betyder att bilden av linjen $x=2$ är punkten $(\sqrt{3},1)$.

10. Låt

$F(x,y,z)=x+y+z-\sin xyz\Rightarrow F(0,0,0)=0$. $\frac{\partial F}{\partial z}=1-xy\cos xyz\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)=1\neq 0$.

Då ger implicita funktionssatsen att ekvationen $F=0$ definierar z som en kontinuerligt deriverbar funktion $z=f(x,y)$ i en omgivning av (0,0,0) . $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ fås genom implicit derivering i ekvationen $x+y+z-\sin xyz=0$:

$$1+\frac{\partial f}{\partial x}-yz\cos xyz-xy\frac{\partial f}{\partial x}\cos xyz=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-1$$

$$1+\frac{\partial f}{\partial y}-xz\cos xyz-xy\frac{\partial f}{\partial y}\cos xyz=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$$

En normalvektor till funktionsytan $z=f(x,y)$: $(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1)$. I origo fås normalvektorn (1,1,1). Tangentplanets ekvation ges då av $x+y+z=0$.

11. Integrationsgränserna ger att $0\le x\le 4\pi-2y-4z$, $0\le y\le 2\pi-2z$, $0\le z\le\pi$ vilket beskriver en tetraeder som begränsas av koordinatplanen och planet $x+2y+4z=4\pi$. Vi byter integrationsordning och får

$$\int_0^{4\pi}dx\int_0^{(4\pi-x)/2}dy\int_0^{(4\pi-x-2y)/4}\cos(x+2y+4z)\cos(x+2y)\cos x\,dz=$$

$$=\int_0^{4\pi}dx\int_0^{(4\pi-x)/2}-\frac{1}{8}\cos x\sin(2x+4y)dy=\int_0^{4\pi}\frac{1}{16}\cos x\sin^2 x dx=0 .$$

12. Låt x , y , z vara parallellepipedens kanter. Dess volym är xyz och dess diagonal är $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Vi söker max av xyz då $x^2+y^2+z^2=9$ och använder Lagranges metod: $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-9)$. Ur denna funktion fås systemet

$$\begin{cases} L_1 = yz + 2\lambda x = 0 \\ L_2 = xz + 2\lambda y = 0 \\ L_3 = xy + 2\lambda z = 0 \\ L_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow yL_1 - xL_2 = (y^2 - x^2)z = 0 \Rightarrow x = y \text{ (x och y är positiva).}$$

Vi får även $zL_2 - yL_3 = (z^2 - y^2)x = 0 \Rightarrow y = z$. Alltså gäller $x = y = z$ som i den sista ekvationen ger $x = y = z = \sqrt{3}$. Den maximala volymen är då $3\sqrt{3} < 6$ vilket betyder att volymen inte kan vara 6.