Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i kurs 5B1131 Matematiska metoder II för S.
Tisdagen den 17 augusti 2004 kl 1400-1900.

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 8 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå betyg 3 krävs minst 18 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,3,…,6) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Om 3 poäng erhålls på någon av de sex första uppgifterna räknas det i fortsättningen som om motsvarande kontrollskrivning varit godkänd.
Del 2 är avsedd för betyg 4 och 5 och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng. Betygsgränser för dessa betyg är 9 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betyg 3 uppnåtts på del 1 eller via sex godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Del 1

1. För den linjära avbildningen $T:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(3,4) = (1,2)$ och $T(2,3) = (1,3)$. Avgör om T är injektiv (one-to-one).

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Bestäm en matris P sådan att $P^{-1}AP$ är diagonal och ange diagonalmatrisen.

3. Beräkna riktningsderivatan av funktionen $f(x,y) = \dfrac{x+6y}{x+y}$ i punkten $(1,0)$ i den riktning som ges av vektorn $(4,3)$. Finns det någon riktning i vilken riktningsderivatan i punkten $(1,0)$ antar värdet 6?

4. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 + 4xy^2$ i området $x^2 + 4y^2 \le 1$.

5. Beräkna linjeintegralen $\int_C (6xy - y^3)\,dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)\,dy$ där C är den kurva som sammansätts av parabelbågen $y = x^2$ från origo till punkten $(1,1)$ och räta linjen därifrån till punkten $(0,1)$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\overline{F} = (xy, 0, z^2)$ ner genom den del av konytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger under planet $z = 1$.

7. Låt $B = \{(1,-5),(0,3)\}$ och $B' = \{(-1,-1),(1,-2)\}$ vara två baser i $\mathbf{R}^2$. Vektorn $\overline{v}$ har koordinatmatrisen $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ i basen B. Bestäm koordinatmatrisen för $\overline{v}$ i basen B'.

8. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D xe^{y^3}\,dxdy$ där D är det ändliga område som innesluts av linjerna $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 1$ och y – axeln.

Del 2

9. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T:\ \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ som sammansätts av en ortogonal projektion på x – axeln följd av en rotation moturs $\dfrac{\pi}{3}$ radianer följd av en spegling i linjen $y = x$. Vad är bilden av linjen $x = 2$?

10. Visa att ekvationen $x + y + z = \sin xyz$ definierar z som en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av origo så att $f(0,0) = 0$. Beräkna $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ och bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i origo.

11. Beräkna trippelintegralen $\displaystyle\int_0^{\pi} dz \int_0^{2\pi-2z} dy \int_0^{4\pi-2y-4z} \cos(x + 2y + 4z)\cos(x + 2y)\cos x\, dx$.

12. Kan volymen av en rätvinklig parallellepiped (rätblock) vara 6 om dess diagonal har längden 3?