Institutionen för Matematik
KTH

Lösningsförslag till
Tentamen i Analytiska metoder och linjär algebra 1
för M, BD, P och T (kurskod 5B1132) samt IT (kurskod 5B1140)
Den 15 april 2004 kl 14.00-19.00

1. Hur många lösningar har nedanstående ekvationssystem?

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + y + 2z = 3 \\ 5x - y - 8z = 2 \end{cases}$$

Lösning: Vi byter plats på första och andra raden, skriver ekvationssystemet på matrisform och använder Gausselimination. Vi får:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -18 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

där vi ser att lösning saknas, eftersom sista raden innebär kravet att $0 = -1$, vilket inte kan vara sant för något val av x, y, z.

Svar: Systemet har inga lösningar.

---

2. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkten $(1, 2, 3)$ och linjen $p(t) = (1 + t,\ 1 + t,\ -t)$.

Lösning: Linjens riktningsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ska vara parallell med planet liksom vektorn $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mellan punkten $(1, 1, 0)$ och punkten $(1, 2, 3)$. Vektorprodukten mellan dessa båda vektorer ger alltså en normalvektor n för planet:

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Planets ekvation blir alltså $-4x + 3y - z + d = 0$ för något tal d och om ekvationen ska vara uppfylld då $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ måste vi ta $d = 1$. Planets ekvation blir alltså $-4x + 3y - z + 1 = 0$.

Svar: $-4x + 3y - z + 1 = 0$.

---

3. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = (x + 1)e^{\sin 3x}$ i punkten $(0, 1)$.

Lösning: Vi deriverar och får att

$$y'(x) = e^{\sin 3x} + (x + 1)e^{\sin 3x} 3 \cos 3x,$$

vilket ger att y'(0)=4. Tangentens ekvation blir alltså $y - 1 = 4(x - 0)$ det vill säga $y = 4x + 1$.

Svar: $y = 4x + 1$

---

4. Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen $y'' + 4y' + 4y = 8x$ som uppfyller att $y(0) = -2$ och $y'(0) = 4$.

Lösning: Den allmänna lösningen till differentialekvationen fås som $y_h + y_p$ där y_h är allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och y_p är någon partikulärlösning till den aktuella ekvationen.

Först söks y_h, dvs lösningen till $y'' + 4y' + 4y = 0$. Karaktäristiska ekvationen $r^2 + 4r + 4 = 0$ har den enda lösningen $r = -2$, varför $y_h = (Ax + B)e^{-2x}$, där A och B är godtyckliga reella tal.

Sedan ansätts en partikulärlösning: $y_p = cx + d$ som har derivatan $y_p' = c$ och andraderivatan $y_p'' = 0$. Vi ser att $y_p'' + 4y_p' + 4y_p = 8x$ om och endast om $4c + 4(cx + d) = 8x$ dvs om och endast om $c = 2$ och $d = -2$. Vi får alltså en partikulärlösning $y_p = 2x - 2$.

Den allmänna lösningen till den givna ekvationen är alltså $y(x) = (Ax + B)e^{-2x} + 2x - 2$ där vi nu ska bestämma A och B så att de övriga villkoren blir uppfyllda. Villkoret att $y(0) = -2$ betyder att $B - 2 = -2$ dvs att $B = 0$. Insättning av detta i uttrycket för y och derivering ger $y'(x) = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} + 2$ så $y'(0) = 4$ om och endast om $A = 2$. Den sökta funktionen är alltså $y(x) = 2xe^{-2x} + 2x - 2$.

Svar: $y(x) = 2xe^{-2x} + 2x - 2$.

---

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_2^3 \frac{7x}{x^2+5x-6}\,dx$.

Lösning: Vi partialbråksuppdelar integranden. Först ser vi att $x^2+5x-6 = (x-1)(x+6)$, så vi söker tal A och B sådana att

$$\frac{7x}{(x-1)(x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6}.$$

Om vi gör liknämigt i högerledet och jämför koefficienterna i polynomen i täljarna får vi ekvationssystemet $A+B=7$, $6A-B=0$ med lösning $A=1$, $B=6$. Därför är

$$\frac{7x}{(x-1)(x+6)} = \frac{1}{x-1} + \frac{6}{x+6},$$

och om vi sätter in detta i vår integral får vi

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{7x}{x^2+5x-6}\,dx &= \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{6}{x+6}\right)dx \\ &= [\ln(x-1) + 6\ln(x+6)]_2^3 \\ &= \ln 2 + 6\ln 9 - 6\ln 8 \\ &= \ln 2 + 6\ln\frac{9}{8}.\end{aligned}$$

Svar: $\ln 2 + 6\ln\frac{9}{8}$.

---

6. Du får veta följande om en reellvärd funktion f av en reell variabel. Kurvan $y=f(x)$ går igenom punkten $(1,7)$ och tangenten till kurvan i denna punkt har riktningskoefficient 7. Dessutom är f deriverbar hur många gånger som helst på hela x-axeln och $f''(1) = -4$. Beräkna

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-7x}{(x-1)^2}.$$

Lösning: Vi Taylorutvecklar och får $f(x) = 7 + 7(x-1) - 2(x-1)^2 + \mathcal{O}((x-1)^3)$. Därför är

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-7x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)^2 + \mathcal{O}((x-1)^3)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-2+\mathcal{O}((x-1))}{1} = -2.$$

Svar: -2.

---

7. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$.

Lösning: Eftersom uttrycket under rottecknet är positivt för alla x så är definitionsmängden till den här funktionen hela reella axeln. Vi deriverar och får att

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^4+1} - x\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1} = \frac{1-x^4}{\sqrt{x^4+1}(x^4+1)}$$

som existerar för alla x. Lokala extrempunkter kan därför bara finnas där derivatan är noll. Vi ser att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 1$ eller $x = -1$. Vi ser vidare att $f'(x) < 0$ när $x < -1$, vilket betyder att f är avtagande där, och $f'(x) > 0$ när $-1 < x < 1$, vilket betyder att f är växande där, och $f'(x) < 0$ när $x > 1$ vilket betyder att f är avtagande där. Eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ så är funktionens största värde $f(1) = 1/\sqrt{2}$ och funktionens minsta värde $f(-1) = -1/\sqrt{2}$ och eftersom funktionen är kontinuerlig och definitionsmängden sammanhängande så tas också alla värden däremellan.

Svar: Värdemängden är alla x sådana att $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

---

8. En matris X som uppfyller att $AX = E$, där E är enhetsmatrisen i något format, brukar kallas en högerinvers till matrisen A. Finn, om så är möjligt, en högerinvers till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösning: Om matrismultiplikationen AX ska vara definierad och resultera i en kvadratisk matris, så måste X vara en 3×2-matris, dvs ha utseendet $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ för några tal a, b, c, d, e, f. Dessa tal måste uppfylla ekvationssystemet

$$\begin{cases} a+c+e=1 \\ b+d+f=0 \\ 2a+2e=0 \\ 2b+2f=1 \end{cases}.$$

Vi ser direkt (eller genom att använda Gausselimination) att detta system har oändligt många lösningar och att en av dessa lösningar är $a=0, b=1, c=1, d=-1/2, e=0, f=-1/2$. En högerinvers är alltså $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

Svar: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

---

9. Bestäm en ekvation för normalen till kurvan

$$1+\arctan(xy-2)=e^{2y-4}+5\ln x$$

i punkten $(x,y)=(1,2)$.

Lösning: Vi deriverar ekvationen implicit med avseende på x och får

$$\frac{y+xy'}{1+(xy-2)^2}=e^{2y-4}2y'+\frac{5}{x},$$

vilket i den aktuella punkten $(1,2)$ betyder att

$$2+y'(1)=2y'(1)+5.$$

Med andra ord är $y'(1)=-3$. Normalens ekvation blir då $y-2=\frac{1}{3}(x-1)$ dvs $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

Svar: $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

---

10. Avgör om integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x(1+x^2)}$ är konvergent.

Lösning: Integralen är generaliserad både i 0 och i ∞. Vi har att

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x(1+x^2)}=\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{x(1+x^2)}+\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x(1+x^2)}$$

och för konvergens krävs att båda dessa senare integraler är konvergenta. Observera att integranden är positiv på $(0, \infty)$. Nu är

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{x(1+x^2)} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0}[2\sqrt{x}]_c^1 = \lim_{c\to 0}(2\sqrt{1} - 2\sqrt{c}) = 2,$$

så den första är i alla fall konvergent. För den andra gäller att

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x(1+x^2)} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to\infty}[\arctan x]_1^r = \lim_{r\to\infty}(\arctan r - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

så den andra är också konvergent. Alltså är den givna integralen konvergent.

Svar: Konvergent