1. På matrisform blir systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & -3 \\ -6 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 - 216 + 12 + 12 + 12 \neq 0,$$

så systemet har bara en lösning.

2. En normerad normal till planet är

$$\frac{(1,-1,2)}{|(1,-1,2)|} = \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}},$$

vilket ger projektionen

$$(3,3,3) - \frac{1}{6}((3,3,3)\cdot(1,-1,2))\,(1,-1,2) = (3,3,3) - (1,-1,2) = (2,4,1).$$

3. Vi tillämpar kvotregeln som ger derivatan

$$f'(x) = \frac{\tan \frac{\pi x}{12} \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} - \sqrt{x^2-5}\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{12}} \frac{\pi}{12}}{(\tan \frac{\pi x}{12})^2}.$$

Insättning av $x = 3$ ger så $f'(3) = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{3}$.

4. Definitionsmängden för f är den positiva halvaxeln, där $x > 0$. Det är klart att f även är deriverbar där så alla lokala extrempunkter uppfyller $f'(x) = 0$. Då $f'(x) = 9 - \frac{1}{x}$ betyder det att den enda tänkbara kandidaten för en minpunkt är $x = \frac{1}{9}$. Att det verkligen är fråga om en minpunkt kan t ex ses genom att man konstaterar att andra derivatan $f''(x) = \frac{1}{x^2}$ är strikt positiv i hela definitionsområdet, vilket betyder att derivatan är strängt växande dvs derivatan är mindre än noll då $x < \frac{1}{9}$ så funktionen är avtagande där, och derivatan är större än noll då $x > \frac{1}{9}$ dvs funktionen växer där. Det minsta värdet blir alltså

$$f\left(\frac{1}{9}\right) = 1 - \ln\frac{1}{9} = 1 + 2\ln 3.$$

5. Variabelbyte $u = \cos x, du = -\sin x dx$ ger att

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

6. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 6r + 10 = 0$ har lösningarna $r = 3 \pm i$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen blir därmed

$$y_h = e^{3x}(A\cos x + B\sin x).$$

För att lättare kunna ansätta partikulärlösningar, så delar vi upp högerledet i $39\cos x$ och 10. Vi vill nu hitta partikulärlösningar y_{p1} och y_{p2} som löser de inhomogena ekvationerna med respektive högerled

$$\begin{aligned} y''_{p1} - 6y'_{p1} + 10y_{p1} &= 39\cos x \quad (1)\\ y''_{p2} - 6y'_{p2} + 10y_{p2} &= 10. \quad (2)\end{aligned}$$

Ekvation (2) är lätt att lösa. I själva verket duger den konstanta lösningen $y_{p2} = 1$. För ekvation (1) ansätter vi $y_{p1} = a\cos x + b\sin x$. Insättning ger

$$-a\cos x - b\sin x + 6a\sin x - 6b\cos x + 10a\cos x + 10b\sin x = 39\cos x,$$

vilket leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -a - 6b + 10a = 39 \\ -b + 6a + 10b = 0 \end{cases}$$

som har lösningarna $a = 3$ och $b = -2$. Vi har alltså $y_{p1} = 3\cos x - 2\sin x$. En partikulärlösning, y_p, till den ursprungliga inhomogena ekvationen fås genom att addera, $y_p = y_{p1} + y_{p2} = 3\cos x - 2\sin x + 1$. Den allmänna lösningen blir

$$y = e^{3x}(A\cos x + B\sin x) + 3\cos x - 2\sin x + 1.$$

7. Vi MacLaurinutvecklar

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + O(t^5) \quad (3)\\ \sqrt{1+t} &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + O(t^3). \quad (4)\end{aligned}$$

Utveckling (1) med t utbytt mot $4x$ ger att

$$x(\sin 4x) - 4x^2 = x(4x - \frac{(4x)^3}{3!} + O(x^5)) - 4x^2 = -\frac{32x^4}{3} + O(x^6)$$

och utveckling (2) med $t = 6x^2$ insatt ger

$$\sqrt{1+6x^2} - 1 - 3x^2 = -\frac{9}{2}x^4 + O(x^6).$$

Vi har så

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+6x^2} - 1 - 3x^2}{x(\sin 4x) - 4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9}{2}x^4 + O(x^6)}{-\frac{32x^4}{3} + O(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{27 + O(x^2)}{64 + O(x^2)} = \frac{27}{64}.$$

8. Man ser direkt att $x = 1$ är en rot. Polynomdivision ger sedan kvoten $x^2 - x - 6$. Andragradsekvationen $x^2 - x - 6 = 0$ har lösningarna $x = -2$ och $x = 3$ så vi får faktoriseringen $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3)$. Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{-\frac{1}{6}}{(x-1)} + \frac{\frac{1}{15}}{(x+2)} + \frac{\frac{1}{10}}{(x-3)}.$$

Så

$$\int \frac{dx}{x^3-2x^2-5x+6} = \int \frac{-\frac{1}{6}}{(x-1)} + \frac{\frac{1}{15}}{(x+2)} + \frac{\frac{1}{10}}{(x-3)}\,dx =$$
$$-\frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{15}\ln|x+2| + \frac{1}{10}\ln|x-3| + C.$$

9. Vektorn från C till D är $(1,2,-1)-(-1,2,1)=(2,0,-2)$ så punkten M har koordinaterna $(-1,2,1)+t(2,0,-2)$ för något t mellan 0 och 1. Vektorn från A till B är $\vec{u}=(1,0,1)-(-1,0,-1)=(2,0,2)$. Låt $\vec{v}$ vara vektorn från A till M, dvs $\vec{v}=(-1,2,1)+t(2,0,-2)-(-1,0,-1)=(0,2,2)+t(2,0,-2)$. Arean hos triangeln BAM ges nu av halva längden av kryssprodukten mellan vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Vi har att

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2t & 2 & 2-2t \end{vmatrix} = (4, 8t-4, 4)$$

så vi ska minimera $|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{4^2+(8t-4)^2+4^2}$. För att göra räkningarna enklare betraktar vi istället kvadraten som har samma minpunkt, dvs vi vill minimera funktionen

$$f(t) = 16+(8t-4)^2+16 = 32+(8t-4)^2.$$

Som vanligt uppfyller en eventuell minpunkt att $f'(t)=0$, dvs

$$0 = f'(t) = 16(8t-4)$$

vilket ger $t=\frac{1}{2}$. Andraderivatan är $=128>0$ så det är verkligen en minpunkt. Minpunkten har alltså koordinaterna $(-1,2,1)+\frac{1}{2}(2,0,-2)=(-1,2,1)+(1,0,1)=(0,2,2)$ och triangelns area blir

$$\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}|(4,8t-4,4)|_{t=1/2} = \frac{1}{2}|(4,0,4)| = 2\sqrt{2}.$$

10. Vi vill finna ett N så att

$$\int_N^\infty \frac{2x-3}{x^4+x^2}\,dx \le 0,005.$$

Vi har att

$$\int_N^\infty \frac{2x-3}{x^4+x^2}\,dx \le \int_N^\infty \frac{2x}{x^4}\,dx = \int_N^\infty \frac{2}{x^3}\,dx = [-\frac{1}{x^2}]_N^\infty = \frac{1}{N^2},$$

vi ser att så länge $N>\sqrt{200}$, t ex $N=15$ kommer kravet vara uppfyllt.