1. Vi har $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A})$ och

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 - r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 - 3r_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

Svar: 4.

---

2. Eftersom polynomet $p(z) = 3z^3 - 8z^2 + 10z - 4$ endast har reella koefficienter så måste även $1 + \mathrm{i}$ vara en rot till ekvationen. Dividerar vi $p(z)$ med $q(z) = (z - (1 - \mathrm{i}))(z - (1 + \mathrm{i})) =$ $= z^2 - 2z + 2$ får vi $p(z) = q(z)(3z - 2)$, så den tredje roten är $2/3$.

Svar: $1 - \mathrm{i}$, $1 + \mathrm{i}$, $2/3$.

---

3. Vi har

$$y' = \frac{3x^2(3x + 2) - 3(x^3 + 4)}{(3x + 2)^2} + \sqrt{4x - 3} + \frac{2x}{\sqrt{4x - 3}}$$

och för $x = 1$ fås $y'(1) = 3$. Tangentlinjen ges av $\dfrac{y - 2}{x - 1} = y'(1)$ och man får

Svar: $3x - y = 1$.

---

4. Karakteristisk ekvation är här $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 2$. Följaktligen är $y_h = (Ax + B)\mathrm{e}^{2x}$ den allmänna lösningen till ekvationen $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Betrakta ekvationen $y'' - 4y' + 4y = 8x + 4$. Ansats $y = ax + b$ ger $y' = a$, $y'' = 0$ vilket, insatt i ekvationen, ger $-4a + 4(ax + b) = 8x + 4 \Leftrightarrow 4ax - 4a + 4b = 8x + 4$. Eftersom detta skall vara en identitet så måste koefficienterna för respektive x–potenser vara lika: $4a = 8$ och $4b - 4a = 4 \Leftrightarrow a = 2$ och $b = 3$ vilket innebär att $y_p = 2x + 3$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_p$ dvs $y = (Ax + B)\mathrm{e}^{2x} + 2x + 3$.

Svar: $y = (Ax + B)\mathrm{e}^{2x} + 2x + 3$.

---

5. Kurvan $y = (5 - x)\sqrt{x - 1}$ skär x–axeln då $(5 - x)\sqrt{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ eller $x = 5$. För $1 \le x \le 5$ är $(5 - x)\sqrt{x - 1} \ge 0$ dvs kurvan ligger ovanför x–axeln. Arean ges av

$$\int_1^5 (5 - x)\sqrt{x - 1}\,\mathrm{d}x = \{\text{ subst. } \sqrt{x - 1} = t,\ x - 1 = t^2,\ x = 1 + t^2,\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t,\ t\colon 0 \to 2\ \} =$$

$$= \int_0^2 2(4 - t^2)t^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 (4t^2 - t^4)\,\mathrm{d}t = 2\Big[4t^3/3 - t^5/5\Big]_0^2 = 128/15.$$

Svar: 128/15.

---

6. Vi har

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} = \{\text{ handpåläggning }\} = \frac{-1}{x - 2} + \frac{1}{x - 3}$$

och

$$\int_4^5 \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x = \int_4^5 \frac{-1}{x - 2}\,\mathrm{d}x + \int_4^5 \frac{1}{x - 3}\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln|x - 2|\Big]_4^5 + \Big[\ln|x - 3|\Big]_4^5 =$$

$$= 2\ln 2 - \ln 3.$$

Svar: $2\ln 2 - \ln 3$.

---

7. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + 2x) - \frac{x}{x + 2}$, $x \ge 0$. Vi vill visa att $f(x) \ge 0$ för alla $x \ge 0$.

Man får

$$f'(x) = \frac{1}{1 + 2x} - \frac{x + 2 - x}{(x + 2)^2} = \frac{(x + 2)^2 - 2(1 + 2x)}{(1 + 2x)(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 2}{(1 + 2x)(x + 2)^2}$$

alltså $f'(x) > 0$ för alla $x \ge 0$. Detta innebär att funktionen f är strängt växande på intervallet $x \ge 0$. Dessutom är $f(0) = 0$ vilket, tillsammans med växandet, medför att $f(x) \ge 0$ för alla $x \ge 0$.

---

8. Implicit derivering av $e^y + y = e^{2x} - 2x$ ger

$$y'e^y + y' = 2e^{2x} - 2 \qquad (*)$$

och för $x = 0$, $y = 0$ fås $y'(0) = 0$.

Implicit derivering av $(*)$ ger

$$y''e^y + (y')^2e^y + y'' = 4e^{2x}$$

och för $x = 0$, $y = 0$ och $y'(0) = 0$ fås $y''(0) = 2$.

Eftersom $y'(0) = 0$ och $y''(0) \ne 0$ så är $x = 0$ en lokal extrempunkt till funktionen y.

Svar: $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$; lokal extrempunkt.

---

9. Varje normal till linjen $3x + 4y = 5$ har riktning vektorn $(3,4)$. Den normal som går genom punkten $(1,3)$ har parameterframställningen $x = 1 + 3t$, $y = 3 + 4t$. Ur ekvationen $3(1 + 3t) + 4(3 + 4t) = 5$ får man det parametervärde som svarar mot skärningspunkten mellan de båda linjerna. Man får $t = -2/5$. Går man den dubbla sträckan får man den punkt som är symmetrisk till punkten $(1,3)$ med avseende på linjen $3x + 4y = 5$, dvs den sökta punkten ges av $x = 1 + 3(-4/5) = -7/5$, $y = 3 + 4(-4/5) = -1/5$.

Svar: $(-7/5, -1/5)$.

---

10. Vi har

$$\frac{2\sin x - \ln(1 + 2x) + p(x)}{x^3e^x} = \frac{2x - x^3/3 + O(x^5) - 2x + 2x^2 - 8x^3/3 + O(x^4) + p(x)}{x^3 + O(x^4)} =$$

$$= \frac{2x^2 - 3x^3 + O(x^4) + p(x)}{x^3 + O(x^4)} = \frac{2/x - 3 + O(x) + p(x)/x^3}{1 + O(x)}$$

Ur $\lim_{x \to 0} \frac{2/x - 3 + O(x) + p(x)/x^3}{1 + O(x)} = 1$ får vi då att $\lim_{x \to 0} (2/x - 3 + p(x)/x^3) = 1$ vilket medför att $p(x) = -2x^2 + 4x^3$ + eventuella termer av grad ≥ 4.

Svar: $p(x) = -2x^2 + 4x^3$ + eventuella termer av grad ≥ 4.
