Lösningsförslag till tentamen i Analytiska metoder och linjär algebra 2, för BD, M, P och T,

5B1133, den 19 maj 2004.

1. Vi har $\boldsymbol{f}_1 = (1,a,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1,1,a)$ och $\boldsymbol{f}_3 = (1,a,1)$. Vektorerna $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ utgör en bas för $\mathbf{R}^3$ om och endast om determinanten

$$\det(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a \neq 0$$

dvs om konstanten $a \neq 1$.

Svar: $a \neq 1$.

2. Låt $f(x,y,z) = 2xy + \dfrac{z}{x} + \ln(z - y)$. En normal till ytan $f(x,y,z) = 7$ ges av gradienten

$$\operatorname{grad} f = (f'_x, f'_y, f'_z) = \left(2y - \frac{z}{x^2}, 2x - \frac{1}{z-y}, \frac{1}{x} + \frac{1}{z-y}\right).$$

Då är $\operatorname{grad} f(1,2,3) = (1,1,2)$ en normalvektor till tangentplanet i punkten $(1,2,3)$. En ekvation för detta plan ges av $\operatorname{grad} f(1,2,3) \cdot (x-1, y-2, z-3) = 0$ alltså $x + y + 2z = 9$.

Svar: $x + y + 2z = 9$.

3. Eftersom funktionen $f(x,y) = y^3 - x^2 + 2xy - 7y^2 + 9y$ har partiella derivator i hela $\mathbf{R}^2$ finns alla lokala extrempunkter bland de kritiska (= stationära) punkterna. Dessa punkter fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_x = -2x + 2y = 0 \\ f'_y = 3y^2 + 2x - 14y + 9 = 0 \end{cases}$$

Ur den första ekvationen fås $y = x$. Den andra ekvationen ger då $x = 1$, $x = 3$ dvs punkterna $(1,1)$ och $(3,3)$.

Vi har $A = f''_{xx} = -2$, $B = f''_{xy} = 2$, $C = f''_{yy} = 6y - 14$ och $AC - B^2 = 24 - 12y$. Man får:
I $(1,1)$ är $AC - B^2 = 12 > 0$ och $A = -2 < 0 \Rightarrow$ en lokal maximipunkt.
I $(3,3)$ är $AC - B^2 = -12 < 0 \Rightarrow$ en sadelpunkt.

Svar: f:s enda lokala extrempunkt är den lokala maximipunkten $(1,1)$.

4. Vi parametriserar γ: $x = t$, $y = 1 - t$, $dx = dt$, $dy = -dt$, t går från 1 till 0. Detta ger

$$\int_\gamma (x^2 + xy)\,dx + (x + 2y)\,dy = \int_1^0 (t^2 + t - t^2 - t - 2 + 2t)\,dt = \int_1^0 (2t - 2)\,dt = \Big[t^2 - 2t\Big]_1^0 = 1.$$

Svar: 1.

5. Låt $\mathbf{D}$ beteckna triangeln med hörnen i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$. Vi har

$$\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)\,dxdy = \{\hat{\boldsymbol{n}} \text{ har positiv } z\text{–komponent}\} = (1,2,1)\,dxdy$$

och

$$\iint_{\mathbf{S}} (x+3, y+2, z+1) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \iint_{\mathbf{D}} (x+3, y+2, z+1) \cdot (1,2,1)\,dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} (x+3, y+2, 4-x-2y+1) \cdot (1,2,1)\,dxdy = 12 \iint_{\mathbf{D}} dxdy = 12 \cdot \text{arean av } \mathbf{D} = 6.$$

Svar: 6.

6. Kurvan $xy = 2$ och linjen $x + y = 3$ skär varandra då

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3-x) = 2 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2 \\ y_1 = 2, y_2 = 1 \end{cases}$$

alltså i punkterna $(1,2)$ och $(2,1)$. Området $\mathbf{D}$ ges då av $2/x \leq y \leq 3 - x$, $1 \leq x \leq 2$. Vi får

$$\iint_{D} x\,dxdy = \int_1^2 dx \int_{2/x}^{3-x} x\,dy = \int_1^2 x\Big[y\Big]_{2/x}^{3-x} dx = \int_1^2 x(3 - x - 2/x)\,dx =$$

$$= \int_1^2 (3x - x^2 - 2)\,dx = \Big[3x^2/2 - x^3/3 - 2x\Big]_1^2 = 1/6.$$

Svar: 1/6.

---

7. Eftersom $f(x,y) = xy$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $x^2 + 4y^2 \le 200$, $y \ge 7$ är sluten och begränsad så antar f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre kritisk punkt eller i en kritisk punkt på randen eller i en singulär punkt.
Inre kritiska punkter: Dessa fås ur ekvationssystemet $f'_x = y = 0$, $f'_y = x = 0$. Vi får punkten $(0,0)$, men denna punkt tillhör inte den tillåtna mängden.
Kritiska punkter på randen $y = 7$: Man har $f(x,y) = xy = 7x = h(x)$ och ekvationen $h'(x) = 0$ har ingen lösning, alltså det finns inga kritiska punkter på denna del av randen.
Kritiska punkter på randen $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 200 = 0$ fås med hjälp av Lagranges metod:
Vi löser ekvationssystemet grad $f = t$ grad g under bivillkoret $g(x,y) = 0$,

$$\begin{cases} f'_x = t\,g'_x \\ f'_y = t\,g'_y \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} y = 2tx \\ x = 8ty \\ x^2 + 4y^2 - 200 = 0 \end{cases}$$

Ur $4y \cdot$ ekvation1 $- x \cdot$ ekvation2 fås $x^2 = 4y^2$ vilket, insatt i ekvation3, ger $y = \pm 5$, dvs punkter som inte tillhör den tillåtna mängden.
Ur ekvationssystemet $x^2 + 4y^2 = 200$, $y = 7$ får man skärningspunkterna mellan randkurvorna. Vi får punkterna $(-2,7)$ och $(2,7)$. Några singulära punkter finns inte.
Sammanfattningsvis får vi punkterna $(-2,7)$ och $(2,7)$. I dessa punkter antar f värdena -14 och 14 alltså

Svar: Största värdet $= 14$, minsta värdet $= -14$.

---

8. a. Ett nödvändigt krav för att $\boldsymbol{F}$ skall vara konservativt är att rot $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$. Eftersom $\boldsymbol{F}$ är kontinuerligt deriverbar i hela $\mathbf{R}^3$, som är enkelt sammanhängande, så är detta krav också tillräckligt. Vi har

$$\text{rot } \boldsymbol{F} = (0,\ a + 1,\ by - 2y) = (0,0,0) \ \Leftrightarrow\ a = -1 \ \text{ och } \ b = 2.$$

Svar a: $a = -1$ och $b = 2$.

b. Vi bestämmer nu en potentialfunktion U till $\boldsymbol{F} = (y^2 - z,\ 2xy,\ 3z^2 - x)$, dvs vi söker en funktion $U(x,y,z)$ sådan att grad $U = \boldsymbol{F}$.

$$\begin{cases} U'_x = y^2 - z & (1) \\ U'_y = 2xy & (2) \\ U'_z = 3z^2 - x & (3) \end{cases}$$

Ekvation (1) ger att $U = xy^2 - xz + g(y,z)$. Derivation med avseende på y ger $U'_y = 2xy + g'_y$. Jämförelse med (2) ger att $g'_y(y,z) = 0$, och således är $U = xy^2 - xz + h(z)$. Detta ger att $U'_z = -x + h'$ och jämförelse med (3) ger att $h'(z) = 3z^3$. Således är $h(z) = z^3 + C$ och $U = xy^2 - xz + z^3$ är en potential.

Svar b: $U = xy^2 - xz + z^3$.

c. $\boldsymbol{F}$ är konservativt $\Rightarrow$ arbetet $\boldsymbol{F}$ uträttar är endast beroende av start– och slutpunkterna och är $= U(0,1,1) - U(2,1,0) = -1$.

Svar c: -1.

---

9. Kroppens rand består av sfären $\mathbf{S}_1$: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och sfären $\mathbf{S}_2$: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Vi har flödet ut ur kroppen = flödet ut ur $\mathbf{S}_2$ + flödet in i $\mathbf{S}_1$.
Enligt Gauss´sats är

$$\text{flödet ut ur } \mathbf{S}_2 = \iint_{\mathbf{S}_2} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \{\, \mathbf{K}_2\!: x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \,\} = \iiint_{\mathbf{K}_2} \text{div}\, \boldsymbol{F}\, dxdydz =$$

$$= \iiint_{\mathbf{K}_2} z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \{ \text{ sfäriska koordinater; } 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \ \} =$$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} r^2\cos^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{-\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{128\pi}{15}\ .$$

På samma sätt får vi att

$$\text{flödet in i } \mathbf{S}_1 = \iint_{\mathbf{S}_1} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \{ \mathbf{K}_1\text{: } x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \} = -\iiint_{\mathbf{K}_1} \operatorname{div} \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\frac{4\pi}{15}$$

alltså flödet ut ur kroppen $= \dfrac{124\pi}{15}$.

Svar: $\dfrac{124\pi}{15}$.

---

10. En sådan bas måste bestå av tre linjärt oberoende egenvektorer till matrisen för T. Av avbildningens geometriska egenskap följer att linjens riktningsvektor $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,3)$ avbildas på sig själv alltså $\boldsymbol{v}_1$ är en egenvektor med egenvärdet $\lambda_1 = 1$. Om $\boldsymbol{v}$ är en vektor som är ortogonal mot $\boldsymbol{v}_1$ så avbildas $\boldsymbol{v}$ på vektorn $-\boldsymbol{v}$ alltså $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor med egenvärdet $\lambda = -1$. Genom att välja två linjärt oberoende vektorer $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$, båda ortogonala mot $\boldsymbol{v}_1$, får vi en bas $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ i vilken T har en diagonalmatris

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

T.ex $\boldsymbol{v}_2 = (2,-1,0)$ och $\boldsymbol{v}_3 = (3,0,-1)$.

Svar: T.ex basen $(1,2,3)$, $(2,-1,0)$, $(3,0,-1)$ och matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
