Institutionen för matematik
KTH

Tentamentsskrivning, 2004-08-17, kl. 14.00-19.00
5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra II

Lösningsförslag och svar

1. Det är känt att L är en linjär avbildning samt att $L\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ och $L\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Bestäm $L\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

Lösning. Eftersom en linjär avbildning bibehåller linjära kombinationer, räcker det att hitta två tal x och y sådana att $x\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. Likheten är ekvivalent med ekvationssystemet $\begin{cases}3x-2y=4\\ x-y=1\end{cases}$ som har en enda lösning $x=2,\ y=1$. Således

$$L\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=L\left(2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\right)=2L\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+L\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\6\\5\end{pmatrix}$$

Svar. $L\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\6\\5\end{pmatrix}$

---

2. Bestäm tangentplanets ekvation till grafytan $z=\dfrac{y^2-xy}{x^3-y^2}$ i punkten $(x_0,y_0)=(2,3)$

Lösning. Tangentplanets ekvation till en grafyta $z=f(x,y)$ är

$z=z_0+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ där $z_0=f(x_0,y_0)$. Här har vi $z_0=\dfrac{3}{-1}=-3$,

$$f'_x=\frac{(y^2-xy)'_x(x^3-y^2)-(y^2-xy)(x^3-y^2)'_x}{(x^3-y^2)^2}=\frac{-y(x^3-y^2)-(y^2-xy)\cdot 3x^2}{(x^3-y^2)^2},$$

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{-3\cdot -1-3\cdot 12}{(-1)^2}=-33$$

$$f'_y=\frac{(y^2-xy)'_y(x^3-y^2)-(y^2-xy)(x^3-y^2)'_y}{(x^3-y^2)^2}=\frac{(2y-x)(x^3-y^2)-(y^2-xy)\cdot -2y}{(x^3-y^2)^2},$$

$f'_y(x_0,y_0)=\dfrac{4\cdot -1-3\cdot -6}{(-1)^2}=14$. Detta ger tangentplanets ekvation $z=-3-33(x-2)+14(y-3)$ eller $z=-33x+14y+21$

Svar. $z=-33x+14y+21$

---

3. Bestäm alla lokala maximipunkter till $f(x,y)=(y^2-x^2)e^{-y}$

Lösning. Funktionen är definierad och är differentierbar för alla (x,y), således en maximipunkt kan finnas endast där båda partialderivator är 0. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_x = -2xe^{-y} = 0 \\ f'_y = (2y - y^2 + x^2)e^{-y} = 0 \end{cases}$$ Då $e^{-y} > 0$ får vi ur den 1:a ekvation att $x = 0$ och sedan ur den 2:a ekvation att $2y - y^2 = 0$. Detta ger oss två kritiska punkter $O(0,0)$ och $P(0,2)$. Punkternas karaktär undersöker vi genom Hesses matris

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-y} & 2xe^{-y} \\ 2xe^{-y} & (2 - 4y + y^2 - x^2)e^{-y} \end{pmatrix}.$$ Då

$\det H(O) = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 < 0$ är O en sadelpunkt. Däremot $H(P) = \begin{pmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{pmatrix}$. Här har vi $\det H(P) = 4e^{-4} > 0$ och $-2e^{-2} < 0$, således är $P(0,2)$ en lokal maximipunkt, $f(P) = 4e^{-2}$

Svar. $P(0,2)$ är en lokal maximipunkt, $f(0,2) = 4e^{-2}$

---

4. Beräkna volymen av den ändliga kroppen som begränsas av koordinatplanen samt planet $y = 12$ och ytan $x + 2z - z^2 = 1$

Lösning. Ytan $x + 2z - z^2 = 1$ skär planet $x = 0$ då $2z - z^2 = 1$d.v.s. då $z = 1$. Således kan kroppen anges med olikheterna: $0 \le y \le 12, 0 \le z \le 1, 0 \le x \le 1 - 2z + z^2$. Då är volymen

$$V = \int_0^{12} dy \int_0^1 dz \int_0^{1-2z+z^2} dx = 12\int_0^1 (1 - 2z + z^2)dz = 12\left[z - z^2 + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = 4$$

Svar. Volymen=4

---

5. Beräkna flödesintegralen $\oiint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n} d\sigma$ då där S är ytan till det axelparallella rättblocket med två av hörnen i punkterna (0, 0, 0) och (3, 2, 1), $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, \ xy, \ z^2)$, $\hat{n}$ är utåtriktad enhetsnormal.

Lösning. Enligt divergenssatsen är flödesintegralen $= \iiint_R div\vec{F}dV$ där R är det axelparallella rättblocket med två av hörnen i punkterna (0, 0, 0) och (3, 2, 1). Då $div\vec{F} = 2x + x + 2z = 3x + 2z$ kan integralen skrivas om som

$$\int_0^3 dx \int_0^2 dy \int_0^1 (3x + 2z)dz = \int_0^3 dx \int_0^2 \left[3xz + z^2\right]_{z=0}^{z=1} dy = \int_0^3 dx \int_0^2 (3x + 1)dy = 2\int_0^3 (3x + 1)dx = \left[3x^2 + 2x\right]_0^3 = 33$$

Svar. 33

---

6. Bestäm Taylorpolynomet av tredje ordning till funktionen $f(x, y) = \cos(x + y - 3) + (y - 2)e^{1-x}$ kring punkten (1, 2).

Lösning. Om vi betecknar $h = x - 1, k = y - 2$ blir uttrycket $\cos(h + k) + ke^{-h}$. Då både $h + k$ och $-h$ går mot 0 om $(x, y) \to (0,0)$ kan vi använda MacLaurinutvecklingarna:

$\cos(h + k) = 1 - \frac{(h + k)^2}{2} + ...$ och $e^{-h} = 1 + (-h) + \frac{(-h)^2}{2} + ...$. Detta ger oss

$\cos(h + k) + ke^{-h} = 1 - \frac{1}{2}h^2 - hk - \frac{1}{2}k^2 + k - kh + \frac{1}{2}kh^2 + ...$ där punkter döljer termer av grad 3 eller större. Således

$$\boxed{\textbf{\textit{Svar}}.\ 1+(y-2)-\frac{1}{2}(x-1)^2-2(x-1)(y-2)-\frac{1}{2}(y-2)^2+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)}$$

---

7. Undersök om vektorfältet $\vec{F}=\left(\frac{2xy}{x^2+1}+\frac{y}{x^2y^2+1},\ \ln(x^2+1)+\frac{x}{x^2y^2+1}+3\right)$ är konservativt. Om så är fallet bestäm en potential till $\vec{F}$.

Lösning. Vi betecknar $P=\frac{2xy}{x^2+1}+\frac{y}{x^2y^2+1}$, $Q=\ln(x^2+1)+\frac{x}{x^2y^2+1}+3$. Då

$P'_y=Q'_x=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3x^2y^2+1}{(x^2y^2+1)^2}$ och denna function är definierad för alla *x* och *y*, är fältet $\vec{F}$ konservativt. Första ansats till potentialen är

$U=\int Pdx=y\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\int\frac{ydx}{(xy)^2+1}=y\ln(x^2+1)+\arctan(xy)+g(y)$, där $g(y)$ är en godtycklig konstant m.a.p. *x*, som kan bero på *y*.

(Vid integrationen har vi substituerad $t=x^2+1$ i den 1:a integralen och $t=xy$ i den 2:a. För att bestämma $g(y)$ skall vi beräkna $\frac{\partial U}{\partial y}$ och jämföra det med *Q*. Då fås $g'(y)=3$, vilket ger oss $g(y)=3y+C$ och

$$\boxed{\textbf{\textit{Svar}}.\ U=y\ln(x^2+1)+\arctan(xy)+3y+C}$$

---

8. Bestäm arean av den delen av konen $x^2+y^2=z^2$ som tillhör området $0\le yx^2\le 1,\ x\ge 3,\ z\ge 0$

Lösning. Övre delen av konen (där $z\ge 0$) är grafytan $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Projektionen på *xy*-planet av ytstycket ifråga är ett oändligt område $0\le y\le\frac{1}{x^2},\ x\ge 3$. Arean uttryckas då med en generaliserad integral

$$\int_3^{\infty}dx\int_0^{1/x^2}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dy=\int_3^{\infty}dx\int_0^{1/x^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dy=\int_3^{\infty}dx\int_0^{1/x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}$$

$$=\int_3^{\infty}dx\int_0^{1/x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dy=\int_3^{\infty}dx\int_0^{1/x^2}\sqrt{2}dy=\int_3^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{x^2}dx=\left[-\frac{\sqrt{2}}{x}\right]_3^{\infty}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\boxed{\textbf{\textit{Svar}}.\ \text{Arean}=\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

---

9. Beräkna linjentegralen $\oint_L(4x+2y)dx+zdy$ där L är skärningskurvan mellan ytorna $z=(x-1)^2+(y+2)^2$ och $2x-4y+z=6$. Skärningskurvan genomlöps på så sätt att kurvans projektion på *xy*-planet genomlöps motsols.

Lösning. En ekvation för kurvans projektion på *xy*-planet fås genom *z*-elimination:

$2x-4y+(x-1)^2+(y+2)^2=6\Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Detta ger oss en parameterframställning:

$x=\cos t, y=\sin t, z=6-2x+4y=6-2\cos t+4\sin t$ där t löper från 0 till 2π . Insättning i linjeintegralen ger då $\int_0^{2\pi}(4\cos t+2\sin t)(-\sin t dt)+(6-2\cos t+4\sin t)\cos t dt=$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-2\cos^2 t-2\sin^2 t+6\cos t\right)dt=\int_0^{2\pi}(-2+6\cos t)dt=[-2t+6\sin t]_0^{2\pi}=-4\pi$$

Svar. -4π

---

10. Det är känt att på ytan *xy*+*yz*+*xz*=12 finns en punkt som ligger närmast till planet *x*+*y*+*z*=1. Bestäm punkten och avståndet.

Lösning. Avståndet från en allmän punkt $M(x,y,z)$ till planet *x*+*y*+*z*=1 är $\dfrac{|x+y+z-1|}{\sqrt{3}}$ (använd formeln $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ för avståndet från punkten $M(x_0,y_0,z_0)$ till planet $Ax+By+Cz+D=0$, eller beräkna beloppet av projektionen $\mathrm{Pr}_{\vec{N}}\,\overrightarrow{PM}=\dfrac{\overrightarrow{PM}\cdot\vec{N}}{\vec{N}}$ där $\vec{N}$ är en normalvektor till planet och *P* en godtycklig punkt på planet). Ytan *xy*+*yz*+*xz*=12 skär inte planet
($x+y+z=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=1 \Leftrightarrow xy+xz+yz=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\le\frac{1}{2}$),
således räcker det att hitta punkter på ytan där funktionen *x*+*y*+*z*–1 antar minst positivt värde och störst negativt värde (Ytan är en andragradsyta och består faktiskt av två sammanhängande delar som ligger på båda sidor av planet). Vi använder Lagranges metod: vi bildar en funktion $F(x,y,z,\lambda)=x+y+z-1+\lambda(xy+xz+yz-12)$ och får ekvationssystemet för extrempunkter

$$\begin{cases} F'_x=1+\lambda(y+z)=0 \\ F'_y=1+\lambda(x+z)=0 \\ F'_z=1+\lambda(x+y)=0 \\ F'_\lambda=xy+xz+yz-12=0 \end{cases}$$

som har två lösningar: 1) $x=y=z=2, \lambda=-0.5$ och 2) $x=y=z=-2, \lambda=0.5$. Den 1:a ger en punkten *A*(2, 2, 2) som ligger på avståndet $\dfrac{|2+2+2-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, den 2:a punkten *B*(–2, –2, –2) som ligger på avståndet $\dfrac{|-2-2-2-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}>\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. Således

Svar. Den närmaste punkten är *A*(2, 2, 2), avståndet $=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$