

Preliminära betygsgränser är 16, 22, 30 poäng inklusive bonuspoäng för betygen 3, 4, resp. 5. Skriv utförliga lösningar, och ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

1. Bestäm konstanttermen i uttrycket $(\frac{1}{x} + x^2)^{12}$. (3p.)
2. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$. (3p.)
3. Bestäm derivatan $y'(e)$, där $y(x)$ definieras genom $ye^y = x$ för $x \geq 0$. (3p.)
4. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-2x} + \sin x$. (3p.)
5. Visa att $\ln x \geq \frac{x-1}{e-1}$ för $1 \leq x \leq e$. (3p.)
6. Beräkna integralen $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$. [En möjlighet är att använda substitutionen $\tan \frac{x}{2} = t$.] (4p.)
7. Bestäm MacLaurin-utvecklingen (=Taylor-utvecklingen kring $x = 0$) t.o.m. x^6 -termen av $\sin(\frac{\pi}{3} + x^2)$ och ange resttermen på ordo-form eller liknande. (4p.)
8. Beräkna $\int_1^\infty \frac{dx}{x+2x^2}$. (4p.)
9. Formeln för partiell integration för obestämda integraler skrivs ibland

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Om vi nu låter $f(x) = x$ och $g(x) = \frac{1}{x}$ för $x > 0$ så blir detta (för $x > 0$)

$$\int 1 \frac{1}{x} dx = 1 - \int x \left(\frac{-1}{x^2} \right) dx = 1 + \int 1 \frac{1}{x} dx$$

Detta ser ju inte klokt ut: integral = 1 + samma integral! Förklara! (4p.)

10. Det är känt att primitiva funktionen till e^{-x^2} inte är en elementär funktion, dvs. vi kan inte uttrycka den med hjälp av exponentialfunktionen, logaritmfunktionen osv. Ändå existerar en primitiv funktion.
Bestäm derivatan av funktionen $\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$. (Det är en elementär funktion!) (4p.)