KTH Matematik
Lars Svensson

Tentamensskrivning, 2003-12-18, kl 8.00–1300.
5B1137 Reell Analys 1, 8p
Hjälpmedel: inga.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Preliminära betygsgränser: $20-26$p ger betyget 3, $27-33$p betyget 4 och $34-40$p betyget 5.

1. Definiera följande begrepp:

   a) Talföljden $a_1, a_2, \ldots$ konvergerar mot $a$. (1p)

   b) Talföljden $a_1, a_2, \ldots$ är en Cauchyföljd. (1p)

   c) $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ är likformigt kontinuerlig. (1p)

   d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är injektiv. (1p)

   e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är Riemann-integrerbar. (1p)

2. Formulera och bevisa satsen om mellanliggande värde. (4p)

3. Låt $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ vara kontinuerlig. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} 2n \int_{-1/n}^{1/n} f(x)\, dx \qquad (4p)$$

4. Antag att $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uppfyller olikheten $|f(x)| \le x^{10}$ för alla reella $x$.

   a) Måste $f$ vara kontinuerlig i en omgivning till origo? (1p)

   b) Måste $f$ vara deriverbar i origo? (1p)

   c) Måste $f''(0)$ existera? (1p)

   Ge bevis eller motexempel.

5. Finn en primitiv funktion till

$$f(x) = \frac{1}{1 + 3\sin^2 x}$$

   i *hela* intervallet $[0, \pi]$. (4p)

6. Kurvan $y = \arcsin(\frac{1}{1+x^2})$, linjen $y = \frac{\pi}{6}$ och $y$-axeln begränsar ett ändligt område i planet.

   Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då detta område roterar kring $y$-axeln. (4p)

7. Taylorutveckla $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t}\, dt$ omkring origo, och ta med de tre första icke-försvinnande termerna. (4p)

8. Låt $f : [0,1] \to [0,1]$ vara en kontinuerlig funktion sådan att $f(0) = 1$. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \left( \int_0^1 f(x)^n \, dx \right)^{1/n} = 1$$

*Ledning: Tag ett $\epsilon > 0$. Av kontinuiteten i 0 följer att det existerar ett $\delta > 0$ sådant att $1 - \epsilon \leq f(x) \leq 1$ om $0 \leq x \leq \delta$.* (4p)

9. Definiera talföljden $a_0, a_1, a_2, \ldots$ genom $a_0 = 1$ och $a_{n+1} = -\sin a_n$, $n \geq 0$. Visa, till exempel med hjälp av Leibniz' sats om alternerande serier, att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar. (4p)

10. Låt $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $\quad n \geq 0$.
Visa att $f_n$ saknar reella nollställen om $n$ är jämnt, men att $f_n$ har precis ett reellt nollställe om $n$ är udda. (4p)

**Lycka till!**
Lasse