Institutionen för matematik, KTH
Lars Svensson

Lösningsförslag till
TENTAMENSSKRIVNING

5B1137 Reell analys 1 (8 p)
16 april 2004, kl 8.00–13.00

För lösningar till uppgifterna **1**, **2**, **3** och **7** hänvisas till kurslitteraturen.

4. Låt $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) - x$, $|x| < 1$. f:s derivator är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)} - 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{2(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

Eftersom $f''(x) > 0$ om $0 < x < 1$, är f' strängt växande på $[0,1)$. $f'(0) = 0$ medför att $f'(x) > 0$ om $0 < x < 1$. Detta innebär i sin tur att f är växande och, då $f(0) = 0$, att $f(x) > 0$ $\forall x \in (0,1)$, vilket skulle visas.

5. Beteckna med I_n den integral som skall beräknas. Det gäller

$$\begin{aligned} I_n(R) &= \int_0^R x^n e^{-x}\mathrm{d}x = \left[x^n(-e^{-x})\right]_0^R - n\int_0^R x^{n-1}(-e^{-x})\mathrm{d}x = \\ &\overset{n\geq 0}{=} -R^n e^{-R} + nI_{n-1}(R). \end{aligned}$$

Gränsövergång $R \to \infty$ ovan ($R^n e^{-R} \to 0$) ger sambandet $I_n = nI_{n-1}$. En elementär räkning visar att $I_0 = 1$, varför $I_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 I_0 = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

6. Variabelsubstitutionen $y = 1/x \downarrow 0$, $x \uparrow \infty$ leder till gränsvärdesproblemet

$$\lim_{y\downarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\ln\cos^2 y + \frac{1}{2}\sin^2 y}{y^4}.$$

Men detta uttryck kan skrivas om som

$$\begin{aligned} &\frac{\ln(1-\sin^2 y) + \sin^2 y}{2(\sin^2 y)^2}\left(\frac{\sin^2 y}{y^2}\right)^2 = \{\text{Sätt } z = \sin^2 y \downarrow 0.\} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^4 \frac{\ln(1-z)+z}{z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^4 \frac{-z - z^2/2 + \mathcal{O}(z^3) + z}{z^2} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^4\left(-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(z)\right) \to \frac{1}{2}\cdot 1^4\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \text{ då } x \uparrow \infty. \end{aligned}$$

8. Man övertygar sig lätt om att $p + q = pq$ och därmed $q(p-1) = p$. Fixera $y > 0$ och bilda

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy, \ x > 0 \\ \Rightarrow f'(x) &= x^{p-1} - y \quad \text{och} \quad f''(x) = (p-1)x^{p-2}. \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ om $y = x^{p-1} \Leftrightarrow y^q = x^{q(p-1)} = x^p$, och för detta x-värde är även

$$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) x^p - y^{\frac{1}{p-1}+1} = x^p - y^{\frac{p}{p-1}} = x^p - x^p = 0.$$

Eftersom $f''(x) > 0 \ \forall x > 0$, är $x = y^{\frac{1}{p-1}}$ ett minimum. Således måste $f(x) \geq 0$ $\forall x > 0$. Beviset är klart.

9. Svårigheten är att integranden eventuellt är obegränsad nära origo. Maclaurinutveckla:

$$\begin{aligned} \sin x &= x + \mathcal{O}(x^3) \\ \text{och} \quad 1 - \cos x &= 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4). \end{aligned}$$

Eftersom $0 < x < 1$, får vi

$$\begin{aligned} (\sin x)^\alpha &= x^\alpha(1 + \mathcal{O}(x^2))^\alpha = x^\alpha(1 + \mathcal{O}(x^2)) \\ \text{och} \quad (1 - \cos x)^\beta &= \left(\frac{x^2}{2}(1 + \mathcal{O}(x^2)\right)^\beta = \frac{x^{2\beta}}{2^\beta}(1 + \mathcal{O}(x^2)). \end{aligned}$$

Hela integranden är

$$(\sin x)^\alpha (1 - \cos x)^\beta = 2^{-\beta} x^{\alpha + 2\beta}(1 + \mathcal{O}(x^2)).$$

Integralen konvergerar alltså precis då $\alpha + 2\beta > -1$.

10. Utgående från ledningen får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1 \cdot x) - f(0 \cdot x) = [f(tx)]_{t=0}^1 = \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx)\mathrm{d}t = \int_0^1 x f'(tx)\mathrm{d}t = x \int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Uppgiften är nu att verifiera att $g(x) = \int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t$ tillhör klassen C^∞ av oändligt deriverbara funktioner. Vi har

$$\begin{aligned} g(x+h) &= \int_0^1 f'(tx + th)\mathrm{d}t \overset{f \in C^\infty}{=} \int_0^1 \big(f'(tx) + (th)f''(tx) + \mathcal{O}(h^2)\big)\mathrm{d}t = \\ &= g(x) + h \int_0^1 t f''(tx)\mathrm{d}t + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Detta visar att g' existerar enligt definitionen av derivata och ges av

$$g'(x) = \int_0^1 tf''(tx)\mathrm{d}t.$$

Upprepning av samma förfarande ger

$$\begin{aligned} g'(x+h) &= \int_0^1 tf''(tx+th)\mathrm{d}t \overset{f' \in C^\infty}{=} \int_0^1 t\big(f''(tx) + (th)f'''(tx) + \mathcal{O}(h^2)\big)\mathrm{d}t = \\ &= g'(x) + h\int_0^1 t^2 f'''(tx)\mathrm{d}t + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned}$$

alltså att g'' existerar och ges av

$$g''(x) = \int_0^1 t^2 f'''(tx)\mathrm{d}t.$$

Vi gör nu antagandet att den n:te derivatan existerar och ges av

$$g^{(n)}(x) = \int_0^1 t^n f^{(n+1)}(tx)\mathrm{d}t,$$

vilket redan verifierats för $n = 1$ och 2. Av samma skäl som tidigare gäller då även att

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x+h) &= \int_0^1 t^n\big(f^{(n+1)}(tx) + (th)f^{(n+2)}(tx) + \mathcal{O}(h^2)\big)\mathrm{d}t = \\ &= g^{(n)}(x) + h\int_0^1 t^{n+1} f^{(n+2)}(tx)\mathrm{d}t + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned}$$

som visar att

$$g^{(n+1)}(x) = \int_0^1 t^{n+1} f^{(n+2)}(tx)\mathrm{d}t.$$

Att $g \in C^\infty$ följer genom induktionsprincipen.