Institutionen för matematik, KTH
Lars Svensson

# TENTAMENSSKRIVNING

5B1137 Reell analys 1 (8 p)
16 april 2004, kl 8.00–13.00

**Inga hjälpmedel**

**1.** Definiera följande begrepp:

a) kontinuitet (1 p)

b) begränsad talföljd (1 p)

c) surjektiv funktion (1 p)

d) deriverbarhet (1 p)

e) cauchyföljd (1 p)

**2.** Formulera och bevisa Rolles sats. (4 p)

**3.** Formulera och bevisa majorantsatsen för serier. (4 p)

**4.** Visa att $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} > x$ om $0 < x < 1$. (4 p)

**5.** Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\mathrm{d}x$ för $n \in \mathbb{N}$. (4 p)

**6.** Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^4\left(\ln\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{x}\right)$. (4 p)

**7.** Visa med hjälp av riemannintegralens definition att varje monoton funktion på ett slutet, begränsat intervall är riemannintegrerbar. (4 p)

**8.** Visa att $xy \le \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ om $x, y > 0$, $p, q > 1$ och $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. (4 p)

**9.** För vilka $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ konvergerar integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^\alpha (1-\cos x)^\beta \mathrm{d}x$? (4 p)

**10.** Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är oändligt deriverbar på hela $\mathbb{R}$ och att $f(0) = 0$. Visa att det existerar en oändligt deriverbar funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = xg(x), \forall x \in \mathbb{R}$. (4 p)

*Ledning:* Det gäller $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx)\mathrm{d}t$.

*Lycka till!*