Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösningsföslag till tentamen i 5B1137 Reell analys för F1, torsdagen den 16:e december, kl. 14.00 – 19.00.

1. *Följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definieras av*

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n}.$$

Visa att denna följd är växande och uppåt begränsad, och slut sedan att den har ett gränsvärde. Visa också att gränsvärdet är större än 1/2.

Lösning: För att se att följden är växande tittar vi på

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = & \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)+(n-1)} \\ & + \frac{1}{(n+1)+n} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\ & - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{n+n} \\ = & \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0. \end{aligned}$$

Att följden är uppåt begränsad inses till exempel genom

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} < n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Härav följer nu att $\lim_{n\to\infty} a_n$ verkligen finns. Eftersom följden är växande är detta gränsvärde säkert støre än eller lika med

$$a_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}.$$

2. (a) *Bolzano-Weierstrass sats säger att en följd som är begränsad både uppåt och nedåt måste ha en konvergent delföljd. Bevisa denna sats, och ange därvid vilka satser du stödjer dig på.*

(b) *Definiera vad som menas med en Cauchyföljd, och visa att varje Cauchyföljd är konvergent.*

Se Mattuck, sidorna 82 – 84.

3. (a) *Formulera och bevisa Rolles sats (med angivande av de satser som du stödjer dig på).*

   (b) *Låt* $f(x) = x^m(x-1)^n$ *på* $[0,1]$, *där* m *och* n *är positiva heltal. Visa att talet* c *som förekommer i Rolles sats är entydigt bestämt i detta fall, och visa även att* c *delar* $[0,1]$ *i två delsegment vars längder förhåller sig som* m *till* n *(eller tvärtom).*

Lösning: För (a), se Mattuck sidan 211. Vad gäller (b) observerar vi att

$$\begin{aligned} f'(x) &= mx^{m-1}(x-1)^n + nx^m(x-1)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1} \cdot (m(x-1)+nx), \end{aligned}$$

så

$$f'(x) = 0 \iff (m+n)x = m \iff x = \frac{m}{m+n} = c.$$

Eftersom

$$1 - c = \frac{m+n-m}{m+n} = \frac{n}{m+n},$$

är

$$\frac{c}{1-c} = \frac{m}{n}.$$

4. *Funktionerna sinus hyperbolicus och cosinus hyperbolicus definieras av*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

   (a) *Visa hyperboliska ettan:*

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1.$$

   (b) *Skissera grafen av* $\sinh x$, *och visa att denna funktion har en invers – som brukar kallas för* $\operatorname{arsinh} x$.

(c) *Härled ett uttryck för* $\operatorname{arsinh} x$ *genom att lösa ekvationen*

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Lösning: (a) visas genom följande räkning:

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \frac{1}{4}(e^2 + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1.$$

Vad gäller (b) ser vi att

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

så att $\sinh x$ är strikt växande. Men då finns en invers, enligt Mattuck sidan 179.

(c) Den sökta inversen fås på följande sätt:

$$\begin{aligned} x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} &\iff e^y - 2x - e^{-y} = 0 \iff (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \\ &\iff e^y = x \pm \sqrt{x^2+1} = x + \sqrt{x^2+1} \text{ eftersom } e^y > 0 \\ &\iff y = \ln(e^y) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \text{arsinh } x. \end{aligned}$$

5. *Antag att* $f(x)$ *är definierad och kontinuerlig då* $0 \le x \le a$*, och att* $f(x) + f(a-x) \neq 0$ *där. Visa att*

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(x-a)}\, dx = \frac{a}{2},$$

och använd sedan detta resultat för att beräkna

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx.$$

Lösning: Låt

$$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}\, dx.$$

Variabelsubstitutionen $u = a - x \iff x = a - u \Rightarrow dx = -du$ ger att

$$I = \int_{u=a}^{u=0} \frac{f(a-u)}{f(a-u) + f(u)} (-du) = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)} \, dx,$$

så att

$$2I = I + I = \int_0^a \frac{f(x) + f(a-x)}{f(x) + f(a-x)} \, dx = \int_0^a dx = a \iff I = \frac{a}{2}.$$

Eftersom $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ ger detta speciellt att

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

6. (a) *Använd sinus och cosinus för dubbla vinkeln för att visa att*

$$\tan\theta = \cot\theta - 2\cot(2\theta).$$

   (b) *Använd detta för att beräkna*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{x}{2^k}\right), \quad \text{då} \quad 0 < x < \pi.$$

   (c) *Beräkna*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

   som ett punktvist gränsvärde.

Lösning: (a) är trivialt:

$$2\cot(2\theta) = 2\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = 2\frac{(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta} = \cot\theta - \tan\theta.$$

(b) Ur (a) följer sedan att

$$\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k}\cot\left(\frac{x}{2^k}\right) - \frac{1}{2^{k-1}}\cot\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right),$$

vilket i sin tur visar att

$$\begin{aligned}S_n =&\frac{1}{2}\cot\left(\frac{x}{2}\right)-\cot x+\frac{1}{2^2}\cot\left(\frac{x}{2^2}\right)-\frac{1}{2}\cot\left(\frac{x}{2}\right)+\dots\\&+\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\\=&\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)-\cot x.\end{aligned}$$

(c) Om vi för fixt x låter n gå mot ∞ i S_n, så går första termen mot

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)}=&\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan(tx)}=\frac{''0''}{0}=\{\text{l'Hospital}\}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{x}{(\cos tx)^2}}\\=&\frac{1}{x},\end{aligned}$$

så att

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{x}-\cot x.$$

7. *Låt* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *vara en följd av kontinuerliga funktioner på intervallet* $[a,b]$*, och antag att*

$$f_n(x)\to f(x)\quad\text{likformigt på } [a,b] \text{ då } n\to\infty.$$

Visa att då är även $f(x)$ *kontinuerlig på* $[a,b]$*.*

Lösning: Se Mattuck, sidan 312.