Lösningsförslag till tentamensskrivning i Diff & Transl,5B1200.
Fredagen den 27 oktober 2000.

1. $y' + 2xy = f(x) = \begin{cases} x \ , \ 0 \le x < 1 \\ 0 \ , \ \ x \ge 1 \end{cases}$, $y(0) = 2$. Linjär av första ordningen.

Bestäm en integrerande faktor och multiplicera differentialekvationen med denna. e^{x^2} är en integreande faktor.

Vi erhåller följande ekvation: $e^{x^2} y' + e^{x^2} 2xy = \begin{cases} e^{x^2} x \ , \ 0 \le x < 1 \\ e^{x^2} 0 \ , \ \ x \ge 1 \end{cases}$.

$$(e^{x^2} y)' = \begin{cases} e^{x^2} x \ , \ 0 \le x < 1 \\ 0 \ , \ \ x \ge 1 \end{cases}$$

Integrera $e^{x^2} y = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 \ , \ 0 \le x < 1 \\ C_2 \ , \ \ x \ge 1 \end{cases}$

Villkoret $y(0) = 2$ ger $C_1 = \frac{3}{2}$. Insättning och lösning av ekvatonen ger: $y = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-x^2} \ , \ 0 \le x < 1 \\ C_2 e^{-x^2} \ , \ \ x \ge 1 \end{cases}$

Kontinuerlig lösning ger: $\frac{1}{2} e + \frac{3}{2} = C_2$.

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-x^2} \ , \ 0 \le x < 1 \\ (\frac{1}{2} e + \frac{3}{2}) e^{-x^2} \ , \ \ x \ge 1 \end{cases}$$

2. Låt $P(t)$ vara antalet djur vid tiden t.

Den första modellen blir: $\dfrac{\frac{dP}{dt}}{P} = a - bP$, $\dfrac{dP}{dt} = P(a - bP)$.

Nu avlägsnas h djur per tidsenhet varvid modellen modifieras enligt följande: $\dfrac{dP}{dt} = P(a - bP) - h$. Konstanterna är positiva.

De numeriska värdena på konstanterna insättes., dvs 5, 1 respektive 4 : $\dfrac{dP}{dt} = P(5 - P) - 4 = -(P^2 - 5P + 4) = -(P - 1)(P - 4)$.

Stationära lösningar: $\dfrac{dP}{dt} = (1 - P)(P - 4) = 0$, $P_1 = 1$ och $P_2 = 4$.

Teckenstudie ger oss följande tabell :

P'	$-$	0	$+$	0	$-$
P	$\leftarrow$	1	$\rightarrow$	4	$\leftarrow$

Sätt $A = \lim_{t \to \infty} P(t)$ och startvärdet till P_0.

$$\begin{cases} A = 4 \ , \ P_0 > 1 \\ A = 1 \ , \ P_0 = 1 \\ A = 0 \ , \ P_0 < 1 \end{cases}$$

Observera att antalet djur ej blir negativt.

3. Vi behöver tre linjärt oberoende lösningar. De givna lösningarna $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{pmatrix}$ är en lösning för mycket.

Observera att summan av de två första lösningarna är lika med den tredje lösningen.

En fundamentalmatris till systemet ges av $W = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & e^{-5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{-5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{-5t} \end{pmatrix}$,

ty $\det W = \begin{vmatrix} e^{-t} & 0 & e^{-5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{-5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{-5t} \end{vmatrix} = e^{-7t} + e^{-7t} + e^{-7t} = 3e^{-7t} \neq 0$

4. $\int_0^t (y(u) - y'(u))du = e^t - 1$, $y(0) = -1$

Laplacetransformera: $\frac{1}{s}(Y(s) - (sY(s) - y(0))) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$

$Y(s) - sY(s) = \frac{s}{s-1} - 1 - (-1) = \frac{s}{s-1}$

$Y(s) = \frac{-s}{(s-1)^2} = -\frac{s-1+1}{(s-1)^2} = -(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2})$

Återtransformera : $y(t) = -e^t - te^t$

5. Differentialekvationen $(1-t^2)y'' + 2ty' - 2y = 0$, $-1 < t < 1$ har en lösning som är en potens av t.

Sätt in ansatsen $y = t^n$ i differentialekvationen.

$(1-t^2)n(n-1)t^{n-2} + 2tnt^{n-1} - 2t^n = 0$

Identifiering ger: $\begin{cases} t^n: \ -n(n-1) + 2n - 2 = 0 \\ t^{n-2}: \ n(n-1) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (2-n)(n-1) = 0 \\ n(n-1) = 0 \end{cases}$

En gemensam lösning är $n = 1$.

En lösning till differentialekvationen är $y_1 = t$, vilket även kan inses genom direkt inspektion.

En andra lösning erhålles genom ansatsen $y = y_1 z = tz$.

Insättning ger: $(1-t^2)(tz'' + 2z') + 2t(tz' + z) - 2tz = 0$

$(1-t^2)tz'' + ((1-t^2)2 + 2t^2)z' + (2t - 2t)z = 0$

$(1-t^2)tz'' + 2z' = 0$

Sänk ordningen: $u = z'$, $u' = z''$. $(1-t^2)tu' + 2u = 0$ är separabel.

$\frac{u'}{u} = -\frac{2}{t(1+t)(1-t)} = \frac{-2}{t} + \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t}$

Integrera: $\ln|u| = -2\ln|t| + \ln|1+t| + \ln|1-t| + \ln|C_1| = \ln\left|C_1 \frac{(1+t)(1-t)}{t^2}\right|$.

$u = \pm C_1 \frac{(1+t)(1-t)}{t^2} = C_2 \frac{(1+t)(1-t)}{t^2} = C_2(\frac{1}{t^2} - 1)$

Men $u = z' = C_2(\frac{1}{t^2} - 1)$. Integrera: $z = C_2(\frac{-1}{t} - t) + C_3 = C_4(\frac{1}{t} + t) + C_3$

Men $y = tz = t(C_4(\frac{1}{t} + t) + C_3) = C_4(1 + t^2) + C_3 t$.

En andra lösning som är linjärt oberoende av den första är
$y_2 = 1 + t^2$.

Vi beräknar Wronskideterminanten

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} t & 1+t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - 1 - t^2 = t^2 - 1 \neq 0 \;,\; -1 < t < 1$$

y_1 och y_2 är linjärt oberoende och bildar en bas för lösningsrummet.

Den allmänna lösningen ges av $y = C_4(1+t^2) + C_3 t$.

6. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$

Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\mathbf{1} - \lambda)\{(\mathbf{1} - \lambda)^2 + 1\}$$

Egenvärdena blir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$.

Vi bestämmer motsvarande egenvektorer.

$\lambda_1 = 1$ insatt i $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ger :

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0} \;,\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0} \;,\; \mathbf{K}_1 = s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En lösning är: $\mathbf{X}_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 + i$ insatt i $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ger :

$$\begin{pmatrix} 1-1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1-1-i & -1 \\ 0 & 1 & 1-1-i \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0} \;,\; \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0} \;,\; \mathbf{K}_2 = s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm reella lösningar.

En komplex lösning är: $\mathbf{Z} = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t(\cos t + i \sin t)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Real- och imaginärdel av $\mathbf{Z}$ är lösningar till systemet.

$$\mathbf{X}_2 = \operatorname{Re} \mathbf{Z} = e^t\left(\cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_3 = \operatorname{Im} \mathbf{Z} = e^t\left(\cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Allmänna lösningen är en linjärkombination av $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ och $\mathbf{X}_3$

$$\mathbf{X} = C_1\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ -e^t\sin t \\ e^t\cos t \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ e^t\cos t \\ e^t\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & -e^t\sin t & e^t\cos t \\ 0 & e^t\cos t & e^t\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

7. $f(t) = \begin{cases} 0 \;, & -\pi < t < 0 \\ \pi - t \;, & 0 < t < \pi \end{cases}$ $\quad f(t+2\pi) = f(t)$

Fourierserien är på formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{\pi} + b_n \sin\frac{n\pi t}{\pi} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

där koefficienterna är

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dt + \int_{0}^{\pi}(\pi - t)dt\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-(\pi-t)^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dt + \int_{0}^{\pi}(\pi - t)\cos ntdt\right)$$

Partiell integration ger:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[(\pi-t)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin nt}{n}dt\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1-\cos n\pi}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dt + \int_{0}^{\pi}(\pi - t)\sin ntdt\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[(\pi-t)\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{-\cos nt}{n}dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} - \left[\frac{\sin nt}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{n}$$

Vi tilldelar f Fourierserien

$$f(t) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\,\frac{1-\cos n\pi}{n^2}\cos nt + \frac{1}{n}\sin nt$$

Vi skall vidare bestämma en viss series summa, $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}$.

För att ur den beräknade Fourierserien erhålla den sökta summan sätter vi in ett lämpligt värde på t. Välj $t = 0$.

Då erhålles $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\,\frac{1-\cos n\pi}{n^2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2} = \pi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(2m-1)^2} = \pi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4} \;,\; \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Fourierserien kan även bestämmas genom att kombinera två formler i BETA.

Det är 13.1 och formlerna (5) och (6) med $L = \pi$ och $h = \frac{\pi}{2}$.

8. Laplacetransformen av $f(t)$ ges av $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$.

Dela upp integralen i två delar: $L\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt = I_1 + I_2.$

Den första integralen $I_1 = \int_0^T e^{-st} f(t)dt$ existerar, ty integranden är styckvis kontinuerlig och intervallet är ändligt.

För den andra integralen, $I_2 = \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt$, skall vi utnyttja att $f(t)$ är av exponentiell ordning, c, dvs $|f(t)| \le Me^{ct}, \quad t > T$.

Vi uppskattar integralens absolutbelopp.

$$\left|\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \le \int_T^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt \le \int_T^\infty e^{-st} Me^{ct} dt = M\int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt = M\left[-\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\right]_T^\infty$$

$$\left|\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \le M\frac{1}{s-c} \text{ , då } s-c>0$$

Jämförelsekriteriet för generaliserade integraler ger att $\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt$ konvergerar då $s-c>0$.

Vi har då visat de bägge integralerna existerar och således existerar summan av dessa.

9.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ , } 0 < x < \pi \text{ , } t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ , } t > 0$$

$$u(x,0) = \sin x + 10\sin 3x \text{ , } 0 < x < \pi$$

Vi använder variabelseparationsmetoden.

Sätt $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i differentialekvationen ger: $X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \text{konstant} = \lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

Endast negativa värden på konstanten ger icke-triviala lösningar. Sätt $\lambda = -\mu^2$.

Vi erhåller då följande lösningar: $\begin{cases} X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x \\ T(t) = Ce^{-\mu^2 t} \end{cases}$

Bestäm den lösning som uppfyller de givna randvillkoren.

Variabelseparationen tillsammans med randvillkoren ger:

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

Detta ger:

$$\begin{cases} 0 = X(0) = A \\ 0 = X(\pi) = A\cos\mu\pi + B\sin\mu\pi \end{cases}$$

Icke-triviala lösningar erhålles då $\mu = n$, där $n \in N$.

Våra icke-triviala lösningar är: $\begin{cases} X(x) = B\sin nx \\ T(t) = Ce^{-n^2 t} \end{cases}$

För varje heltal, $n \in N$, är $u_n(x,t) = BC\sin nx e^{-n^2 t}$ en lösning.

För den homogena differentialekvatonen är även linjär-kombinationer av lösningar lösning till differentialekvationen.

Bilda $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx e^{-n^2 t}$.

Begynnelsevillkoret ger konstanterna a_n.

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \sin x + 10\sin 3x$$

Direkt identifiering ger: $a_1=1$, $a_3=10$, övriga $a_n=0$.

Lösningen är: $u(x,t)=\sin x \ e^{-t} + 10\sin 3x \ e^{-9t}$.

10. $x''+x=(\frac{1}{2}-3(x')^2)x'-x^2$

Vi skriver om differentialekvatioen till ett plant autonomt system $\begin{cases} x'=y \\ y'=x''=-x+(\frac{1}{2}-3(y)^2)y-x^2 \end{cases}$.

Bestäm systemets kritiska punkter, där är vektorn $(x',y')=(0,0)$.

$$\begin{cases} 0=x'=y \\ 0=y'=x''=-x+(\frac{1}{2}-3(y)^2)y-x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0=y \\ 0=-x(1+x) \end{cases}$$

De kritiska punkterna är $(0,0)$ och $(-1,0)$.

Vi undersöker deras karaktär genom att studera Jacobimatrisen i punkterna.

Systemet kan skrivas: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x+(\frac{1}{2}-3(y)^2)y-x^2 \end{pmatrix}$

Jacobimatrisen ges av $\mathbf{J}(x,y)=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x \partial y}(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2x & \frac{1}{2}-9y^2 \end{pmatrix}$.

Punkten (0,0) ger: $\mathbf{J}(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Spåret $\tau=\frac{1}{2}$ och determinanten $\Delta=+1$.

Egenvärdena blir $\lambda_{1,2}=\frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2-4\Delta}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{2})^2-4}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{4}$

Punkten (0,0) är en instabil spiralpunkt.

Punkten (-1,0) ger: $\mathbf{J}(-1,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Spåret $\tau=\frac{1}{2}$ och determinanten Δ=-1.

Egenvärdena blir $\lambda_{1,2}=\frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2-4\Delta}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{2})^2+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

Punkten (-1,0) är en sadelpunkt och dämed instabil .