Institutionen för matematik
KTH

**Tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200.**

Lördagen den 12 januari 2002, kl 0900-1400.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 15-19p; 4: 20-24p; 5: 25p-, inklusive bonus.
Uppgifterna: 1 ,4 , 8 ger 3 poäng; 2 - 3, 5, 7 ger 4 poäng, 6 ger 5 poäng.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2 y' + 3xy = \dfrac{\sin x}{x}$ , $x > 0$
som uppfyller villkoret $y(\pi) = 0$.

2. En tavla som är till salu påstås vara 400 år gammal. Pigment i målningen innehåller vitt bly med halveringstiden 22 år. Noggranna mätningar ger vid handen att 31/32 av den ursprungliga mängden vitt bly har sönderfallit. Antag att sönderfallshastigheten är proportionell mot mängden vitt bly. Är en tavelskojare i farten? Avgör tavlans ålder.

3.Sök allmänna lösningen till $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ , där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Vad är hastighetsvektorn då $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ?
Avgör även en partikels öde om den vid tiden $t = 5$ befinner sig i punkten $(-2,4)$.

4. Antag att $(x+1)y'' + xy' - y = 0$ , $x > 0$. En lösning till denna ekvation är $y(x) = e^{-x}$. Bestäm allmänna lösningen.

5. Ett mekaniskt system styrs av ekvationen $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = b(t)$ , där $b(t) = \begin{cases} 1 , & 1 < t < 2 \\ 0 , & \text{för övrigt} \end{cases}$.
Systemet startar i vila $x(0) = 0$ , $\dot{x}(0) = 0$ . Bestäm $x(t)$ för $t > 0$. Tolka den givna differentialekvationen fysikaliskt.

6. a) En lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' = y^3$ , $y(0) = 0$ ges av $y \equiv 0$.
Är lösningen entydig? Motivera!
b) $y = x^3$ är en lösning till $y' = 3y^{2/3}$ , $y(0) = 0$. Är lösningen entydig? Motivera!
c) Ange det största intervall i vilket lösningen till ekvationen $y' = 3x^2(y^2 + 1)$ , $y(0) = 1$ existerar. Är lösningen entydig? Motivera!

7. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till systemet: $\begin{cases} x' = -3x + y^2 + 2 \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$.

8. Lös Laplaces ekvation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ i rektangeln $0 < x < \pi$ , $0 < y < 1$ med randvärdena
$u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,0) = 0$ , $u(x,1) = 1$.