5B1200, Differentialekvationer och transformer I.
Inlämningsuppgift, hösten 2000.
Rörelse hos pianosträng

I ett piano sätts strängar i plan svängning genom att de anslås med små filthammare.
Vi skall studera en sådan strängs form som funktion av tiden, liksom innehållet av övertoner.
Matematiskt innebär detta att vi skall lösa ett randvärdesproblem för en partiell differentialekvation, den endimensionella vågekvationen, och applicera begynnelsevillkor som motsvarar hammarens anslag.

Om strängen antar vi
- att den har längden L [m],
- att den är homogen (jämntjock) och har densiteten p[kg/m],
- att den är inspänd vid x = 0 och x = L längs en x-axel.

Utböjningen u(x,t) [m] vid tiden t [s] uppfyller då med god approximation differentialekvationen

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad 0 < x < L, \ t > 0 \quad [1]$$

och randvillkoren

$$u(0,t) = 0 \qquad 0 < t \qquad [2]$$
$$u(L,t) = 0 \qquad 0 < t \qquad [3]$$

Storheten c, som har hastighetsdimension, är då en konstant som beror på materialet och spänningen i strängen.
Som en modell för hur hammaranslaget verkar antar vi
- att strängen i startögonblicket, t = 0, befinner sig i viloläge,
- att hammaren träffar ett strängsegment av längd H [m] centrerat till 1/7 av stränglängden,
- att strängen längs detta segment i startögonblicket får en hastighet v [m/s] vinkelrätt mot x-axeln,
- att strängen i de övriga delarna har hastigheten 0 i startögonblicket.

Detta innebär att vi för funktionen u(x,t) har startvillkoren

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 < x < L \qquad [4]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} v & \text{då } L/7 - H/2 < x < L/7 + H/2 \\ 0 & \text{då } 0 \le x < L/7 - H/2 \text{ eller } L/7 + H/2 < x \le L \end{cases} \qquad [5]$$

De olika konstanterna har följande numeriska värden:

L = 1, H =1/(10+A+B+1) , c = (800 +B+1), v = A+B, p = 1/10.

A och B är de två sista nollskilda siffrorna i ditt personnummer.

Del 1

Genomför variabelseparation i differentialekvationen [1] .
Ansätt u(x,t) = X(x)T(t) och bestäm de lösningar som satisfierar de homogena villkoren [2], [3] och [4], (”egensvängningarna” eller ”övertonerna”).
Sätt sedan $u = \sum B_n u_n$
där u är de egensvängningar, som maximalt har amplituden 1,
och bestäm sedan konstanterna B_n
så att villkoret [5] också satisfieras.
Ange också ”grundtonens” periodtid T.
(Grundtonen = den egensvängning som har lägst frekvens, dvs längsta periodtiden.)

Del 2:

Vi vill få en uppfattning om strängens form med hjälp av "ögonblicksbilder" $u(x,t_i)$ vid några fixa tidpunkter t_i.

Maple klarar dock inte av att summera den oändliga serien, utan vi får nöja oss med att titta på en ändlig delsumma $S_N = \sum_{n=1}^{N} B_n u_n$

För att avgöra hur många termer vi skall ta med, tittar vi först på halten av olika övertoner.
Som ett mått på denna använder vi övertonens andel av strängens totala energi.

Man kan visa att energin hos övertonen $B_n u_n$ är $E_n = n^2 \pi^2 p \; c^2 B_n^2 /(4L)$

och att den totala energin som tillförts strängen är $W = p \; H \; v^2 / 2$.

Det gäller att $\sum \mathrm{E_n} = W$.

Låt Maple plotta E_n som funktion av n från 1 till 300.

(Talet n är egentligen ett heltal, men man får en snabb överblick genom att göra en kontinuerlig plot.)
Bestäm med hjälp av denna plot ett lämpligt N — låt Maple räkna ut delsummans andel av den totala energin med hjälp av kommandot sum. Använd evalf för att få ett decimaltal som resultat.
Detta bör bli större än eller ungefär lika med 0.9.

Plotta S_N som funktion av x för att få ögonblicksbilder av strängen vid tiderna $t = 0.01T$, $0.07\,T$, $0.15\,T$, $0.33\,T$, $0.50\,T$ och $0.75T$.

Animera även strängens rörelse.
Lämpligt Maplekommando: animate(Sn,x=0..L,t=0..T,frames=50);
där parametern frames anger antalet ögonblicksbilder — kan väljas mindre än 50.
Mindre värde ger förstås en ”hackigare” bioföreställning.